VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATIKY II

VE STRUKTUROVANÉM STUDIU

RNDr. Miroslava Dubcová, Ph.D.
RNDr. Lucie Purmová, Ph.D.
doc. RNDr. Carmen Simerská, CSc.

PRAHA
2008

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Anotace:

Sbírka příkladů z MATEMATIKY II ve strukturovaném studiu je určena pro bakalářský a magisterský stupeň studia všech fakult Vysoké školy chemicko-technologické v Praze. Doplňuje skripta doc. RNDr. Daniela Turzíka, CSc. a kolektivu: Matematika II ve strukturovaném studiu, Praha, 2005, 1. vydání. Její obsah tudíž souhlasí s obsahem těchto skript.
Látka je rozdělena do 12 kapitol. Každá kapitola obsahuje řadu řešených příkladů, jejichž prostudování by mělo studentům usnadnit řešení jednotlivých cvičení, jejichž výsledky jsou uvedeny na konci skript. Sbírka je doplněna mnoha obrázky.

ISBN 978-80-7080-706-4

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Tato sbírka příkladů doplňuje skripta doc. RNDr. Daniela Turzíka, CSc. a kolektivu: Matematika II ve strukturovaném studiu, Praha, 2005, 1. vydání, na která se v textu odkazujeme zkratkou [MII]. Sbírka navazuje na sbírku Mgr. Libora Heřmánka a kolektivu: Sbírka příkladů z Matematiky I ve strukturovaném studiu, Praha 2005, 2008, 1. a 2. vydání. Sbírka je určena pro bakalářský a magisterský stupeň studia všech fakult Vysoké školy chemicko-technologické v Praze.

Látka je rozdělena do 12 kapitol, přičemž pořadí jednotlivých matematických partií odpovídá citovaným skriptům [MII].

Sbírka obsahuje vedle neřešených příkladů, jejichž výsledky jsou uvedeny na konci skript, také značné množství řešených příkladů, které ilustrují postupy řešení typických úloh. Jejich prostudování by mělo studentům usnadnit řešení jednotlivých příkladů a osvojení důležitých návyků k tomu potřebných.

V těchto skriptech je užito následujících symbolů:

$\bullet$ ... označení obtížnějšího příkladu, přičemž tento symbol předchází číslu daného příkladu, např. $\bullet$ **7.3.**

$\diamondsuit$ ... začátek slovního zadání příkladu (popř. skupiny příkladů), pokud toto zadání předchází číselnému označení daného příkladu

$\heartsuit$ ... konec řešeného příkladu

Základní číselné množiny jsou značeny následovně:

$\mathbb{N}$ ... množina přirozených čísel

$\mathbb{Z}$ ... množina celých čísel

$\mathbb{Q}$ ... množina racionálních čísel

$\mathbb{R}$ ... množina reálných čísel

$\mathbb{C}$ ... množina komplexních čísel

Přejeme čtenářům těchto skript mnoho úspěchů při studiu matematiky a při jejím používání.

Je naší milou povinností poděkovat Doc. RNDr. F. Bubeníkovi, CSc. za cenné připomínky, které pomohly zlepšit text těchto skript.

Praha, listopad 2008 Autoři.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Obsah

1 Lineární prostor

1.1 Obecný lineární prostor, podprostor

Nechť V je neprázdná množina, na které jsou definovány operace $+$ (sčítání) a operace $\cdot$ (násobení reálnými čísly). Řekneme, že množina V spolu s těmito operacemi tvoří **lineární prostor**, jestliže operace $+$ a $\cdot$ splňují 8 podmínek (axiomů), viz [MII], kapitola 1.

Nechť V je lineární prostor. Podmnožinu $V_1 \subset V$ nazveme **podprostorem** lineárního prostoru V jestliže platí:

1. Je-li $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_1$, potom i $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V_1$.
2. Je-li $\boldsymbol{a} \in V_1, \alpha \in \mathbb{R}$, potom i $\alpha \cdot \boldsymbol{a} \in V_1$.

<u>Poznámka</u>: Ze vztahu 2. plyne, že $\boldsymbol{o} \in V_1$, kde $\boldsymbol{o}$ je nulový prvek prostoru V.

1.1. Zjistěme, zda množina $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,; 3x_1 + x_2 = 0\}$ tvoří lineární prostor. Definujme součet dvou prvků $\vec{x} = (x_1, x_2) \in M$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in M$ a násobek prvku reálným číslem obvyklým způsobem jako v lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení: Daná množina M je množina uspořádaných dvojic $\vec{x} = (x_1, x_2) = (x_1\,, -3\,x_1)$; $x_1 \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že pro $\vec{x}$, $\vec{y} \in M$ je
$\vec{x} + \vec{y} = (x_1\,, -3\,x_1) + (y_1\,, -3\,y_1) = (x_1 + y_1\,, -3x_1 - 3y_1) = (x_1 + y_1\,, -(3x_1 + 3y_1)) \in M$,
dále pro $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\alpha\,\vec{x} = (\alpha\,x_1\,, \alpha\,(-3x_1)) = (\alpha\,x_1\,, -3\alpha\,x_1) \in M\,.$$

Na množině M máme tedy korektně definovány operace sčítání a násobení reálným číslem.
Nyní ověříme osm axiomů z definice lineárního prostoru:
1. Komutativní zákon: pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in M$
$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, -3\,x_1) + (y_1, -3\,y_1) = (x_1 + y_1, (-3\,x_1) + (-3\,y_1)) = (y_1 + x_1, (-3\,y_1) + (-3\,x_1)) =$
$= (y_1, -3\,y_1) + (x_1, -3\,x_1) = \vec{y} + \vec{x}$,
2. Asociativní zákon: pro všechna $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in M$
$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = ((x_1, -3\,x_1) + (y_1, -3\,y_1)) + (z_1, -3\,z_1) = (x_1 + y_1, (-3\,x_1) + (-3\,y_1)) +$
$+ (z_1, -3\,z_1) = ((x_1 + y_1) + z_1, ((-3\,x_1) + (-3\,y_1)) + (-3\,z_1)) =$
$= (x_1 + (y_1 + z_1), -3\,x_1 + (-3\,y_1 - 3\,z_1)) = (x_1, -3\,x_1) + (y_1 + z_1, (-3\,y_1) + (-3\,z_1)) =$
$(x_1, -3\,x_1) + ((y_1, -3\,y_1) + (z_1, -3\,z_1)) = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.
3. Nulovým prvkem je prvek $\vec{0} = (0\,, 0) \in M$.
4. Opačným prvkem k $\vec{x}$ je $-\vec{x} = (-x_1\,, (-3)(-x_1)) = (-x_1\,, 3x_1) \in M$.
5. Pro všechna $(x_1, -3\,x_1) \in M$ platí $1 \cdot (x_1, -3\,x_1) = (x_1, -3\,x_1)$.
6.-7. Platí oba distributivní zákony: pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = (\alpha + \beta) \cdot (x_1, -3\,x_1) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)(-3\,x_1)) =$
$= (\alpha\,x_1 + \beta\,x_1, \alpha\,(-3\,x_1) + \beta\,(-3\,x_1)) = (\alpha\,x_1, \alpha\,(-3\,x_1)) + (\beta\,x_1, \beta\,(-3\,x_1)) =$
$= \alpha\,(x_1, -3\,x_1) + \beta\,(x_1, -3\,x_1) = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
8. $(\alpha\,\beta) \cdot \vec{x} = (\alpha\,\beta)(x_1, -3\,x_1) = ((\alpha\,\beta)\,x_1, (\alpha\,\beta)\,(-3\,x_1)) = (\alpha\,(\beta\,x_1), \alpha\,(\beta\,(-3)\,x_1)) =$
$= \alpha\,(\beta\,x_1, \beta\,(-3)\,x_1) = \alpha\,(\beta\,(x_1, -3\,x_1)) = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x})$.
Tím jsme ověřili všech osm axiomů. Množina M je tedy lineárním prostorem.
Důkaz, že množina M je lineární prostor můžeme provést jednodušším způsobem. Stačí dokázat, že M je lineární podprostor již známého lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$, tj. ověřit tři body z definice lineárního podprostoru. Tyto body jsme v předchozím důkazu již ověřili.

♡

$\diamondsuit$ V následujících příkladech zjistěte, zda daná množina $M \subset \mathbb{R}^3$ tvoří lineární prostor (ověřte tedy, že M je lineární podprostor $\mathbb{R}^3$).

1.2. **a)** $M = \{(x_1\,, x_2\,, x_1 + x_2) \in \mathbb{R}^3\,,\ x_1\,,\ x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$

b) $M = \{(x_1\,, 0\,, x_2) \in \mathbb{R}^3\,,\ x_1\,,\ x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$

c) $M = \{(x_1\,, x_2\,, 1) \in \mathbb{R}^3\,,\ x_1\,,\ x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$

d) $M = \{(x_1\,, x_2\,, x_1 + 2) \in \mathbb{R}^3\,,\ x_1\,,\ x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$

e) $M = \{(x_1\,, x_2\,, x_1 x_2) \in \mathbb{R}^3\,,\ x_1\,,\ x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$

1.3. Zjistěme, zda množina funkcí omezených na intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří lineární prostor. Operaci sčítání definujeme jako součet funkcí a operací násobení reálným číslem jako násobení funkce reálným číslem.

Řešení: Daná množina je

$F = \{f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}\,;\ \exists\, m, M \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $m \le f(x) \le M\}$.

Připomeňme operaci sčítání funkcí

Je-li $f,\ g \in F,$ pak $f{+}g \in F$ je taková funkce, že platí $(f{+}g)(x) = f(x){+}g(x),\ \forall\, x \in \langle a, b\rangle$

a operaci násobení funkce reálným číslem

Je-li $f \in F$ a $\alpha \in \mathbb{R},$ pak $\alpha{\cdot}f \in F$ je taková funkce, že platí $(\alpha{\cdot}f)(x) = \alpha\, f(x),\ \forall\, x \in \langle a, b\rangle\,.$

Součet dvou funkcí z F je opět funkce omezená, neboť je-li

$$m_1 \le f(x) \le M_1 \ \text{ a }\ m_2 \le g(x) \le M_2$$

potom

$$m_1 + m_2 \le f(x) + g(x) \le M_1 + M_2\,.$$

Stejně tak pro násobení. Je-li

$$m_1 \le f(x) \le M_1\,,$$

potom

$$\alpha m_1 \le \alpha f(x) \le \alpha M_1 \text{ pro } \alpha \ge 0 \ \text{ nebo }\ \alpha M_1 \le \alpha f(x) \le \alpha m_1 \text{ pro } \alpha < 0\,.$$

Nulový prvek o je funkce $o(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Opačný prvek k prvku $f \in F$ je funkce $(-f)(x) = -f(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, pro kterou platí $-M_1 \le -f(x) \le -m_1$. Opačný prvek je tedy funkce omezená. Ostatní axiomy 1.,2.,5.,6.,7.,8. platí v množině reálných čísel pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, tedy i v množině F. $\heartsuit$

$\diamondsuit$ Které z následujících množin funkcí s operacemi definovanými jako v příkladu 1.3. tvoří lineární prostor.

1.4. **a)** Množina funkcí sudých na $\langle -a, a\rangle,\ a > 0.$

d) Množina funkcí lichých na $\langle -a, a\rangle,\ a > 0.$

c) Množina funkcí klesajících na $\langle a, b\rangle$.

d) Množina funkcí monotónních na $\mathbb{R}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

• **1.5.** Nechť P je množina posloupností reálných čísel, které mají limitu 0, tj
$$P = \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \,;\ a_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}.$$
Definujme operaci sčítání: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro všechny $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$ a operaci násobení reálným číslem $\alpha \cdot \boldsymbol{a} = \{\alpha\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro všechny $\boldsymbol{a} \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zjistěme zda množina P tvoří lineární prostor.

Řešení: Platí
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha\, a_n = 0\,.$$
Nulový prvek je posloupnost $\boldsymbol{o} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$. Opačný prvek k prvku $\boldsymbol{a} \in P$ je posloupnost $-\boldsymbol{a} = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = 0$. Ostatní axiomy pro sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem platí v množině reálných čísel pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy i v množině P. ♡

♢ Které z následujících množin posloupností s operacemi definovanými jako v příkladu 1.5. tvoří lineární prostor.

• **1.6.** **a)** Množina posloupností, které mají limitu 1.

b) Množina všech posloupností, které mají vlastní limitu.

Symbolem $C(I)$ označujeme množinu všech funkcí spojitých na intervalu I. Symbolem $C^n(I)$ označujeme množinu všech funkcí, které mají na intervalu I spojité derivace až do řádu n včetně. Prostory $C(I)$ a $C^n(I)$ spolu s operacemi $+$, $\cdot$ tvoří lineární prostor.

1.7. Nechť P_k je množina všech polynomů s reálnými koeficientami nejvýše k-tého stupně. Dokažme, že P_k je lineární podprostor prostoru $C(\mathbb{R})$.

Řešení: Je-li $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k$, pak $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_k + b_k)x^k$ je také polynom nejvýše k-tého stupně. Rovněž $\alpha \cdot p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \ldots + (\alpha a_k)x^k$ je polynom k-tého stupně. Prostor P_k je tedy podprostor lineárního prostoru $C(\mathbb{R})$, dokonce prostoru $C^n(\mathbb{R})$ pro $n \geq 0$.

♢ Zjistěte, zda následující množiny jsou lineární podprostory prostoru $C(\mathbb{R})$.

1.8. **a)** Množina polynomů s reálnými koeficienty právě k-tého stupně.

b) Množina spojitých periodických funkcí s periodou p definovaných na $\mathbb{R}$.

1.2 Lineární nezávislost

Nechť V je lineární prostor. Systém prvků $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ je **lineárně nezávislý** (LN) právě tehdy, když platí následující implikace:
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o} \quad \Longrightarrow \quad (\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0)\,.$$
Systém prvků $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ je tedy **lineárně závislý** (LZ) právě tehdy, když platí následující tvrzení:

Existují čísla $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ taková, že alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$ a $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i\, \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

K určení lineární nezávislosti funkcí $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^{k-1}(I)$ můžeme využít Wronského determinant.
Wronského determinantem (Wronskiánem) funkcí $f_1, \dots, f_k$, rozumíme determinant

$$W(x) = W_{f_1,f_2,\dots,f_k}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Je-li $W_{f_1,\dots,f_k}(x) \neq 0$ alespoň pro jedno $x \in I$, pak jsou funkce $f_1, f_2, \dots, f_k$ lineárně nezávislé v prostoru $C(I)$. Opačné tvrzení neplatí.

1.9. Zjistěme, zda vektory $\vec{a}_1 = (1,\, -1,\, 2,\, 3)$, $\vec{a}_2 = (2,\, -1,\, 2,\, -3)$, $\vec{a}_3 = (3,\, -2,\, 4,\, 0)$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení: Lineární nezávislost vektorů zjistíme nejdříve z definice. Položme libovolnou lineární kombinaci řádkových vektorů z $\mathbb{R}^4$ rovnu nulovému vektoru.

$$\begin{aligned} \alpha\,\vec{a}_1 + \beta\,\vec{a}_2 + \gamma\,\vec{a}_3 &= \vec{o} \\ \alpha(1,\, -1,\, 2,\, 3) + \beta(2,\, -1,\, 2,\, -3) + \gamma(3,\, -2,\, 4,\, 0) &= (0\,,0\,,0\,,0) \\ (\alpha + 2\,\beta + 3\,\gamma, -\alpha - \beta - 2\,\gamma, 2\,\alpha + 2\,\beta + 4\,\gamma, 3\,\alpha - 3\,\beta) &= (0\,,0\,,0\,,0)\,. \end{aligned}$$

Porovnáme vektory po souřadnicích a dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha + 2\,\beta + 3\,\gamma &= 0 \\ -\alpha - \beta - 2\,\gamma &= 0 \\ 2\,\alpha + 2\,\beta + 4\,\gamma &= 0 \\ 3\,\alpha - 3\,\beta &= 0\,. \end{aligned}$$

Soustavu lineárních rovnic pro neznámé α, β, γ vyřešíme. Soustava má nekonečně mnoho řešení: $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) = (-t,\, -t,\, t)\,;\ t \in \mathbb{R}$. Například pro $t = 1$, dostaneme $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Našli jsme netriviální lineární kombinaci vektorů $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, která je rovna nulovému vektoru,tj. $-\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{o}$, vektory jsou tedy lineárně závislé.
Nyní vyřešíme úlohu pomocí hodnosti matice. Dané vektory lze považovat za řádkové vektory matice $\mathbf{A}$. Gaussovou metodou určíme její hodnost, která bude shodná s maximálním počtem lineárně nezávislých řádkových vektorů matice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hodnost matice $h(\mathbf{A}) = 2 < 3$, vektory $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3 \in \mathbb{R}^4$ jsou lineárně závislé. ♡

◇ Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně nezávislé. Úlohy řešte pomocí definice nebo užitím hodnosti matice

Dubcová Miroslava, Pyrmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

1.10. a) $\begin{array}{lcl} \vec{a}_1 &=& (\ 1,\ 2,\ 3\ )\,, \\ \vec{a}_2 &=& (\ -2,\ 0,\ -2\ )\,, \\ \vec{a}_3 &=& (\ 2,\ 2,\ 1\ )\,. \end{array}$ b) $\begin{array}{lcl} \vec{b}_1 &=& (\ 2,\ 1,\ -2\ )\,, \\ \vec{b}_2 &=& (\ 1,\ 1,\ -1\ )\,, \\ \vec{b}_3 &=& (\ -3,\ -2,\ 3\ )\,. \end{array}$

1.11. a) $\begin{array}{lcl} \vec{a}_1 &=& (\ 4,\ 1,\ 2,\ 1\ )\,, \\ \vec{a}_2 &=& (\ 3,\ 0,\ -5,\ 0\ )\,, \\ \vec{a}_3 &=& (\ 1,\ 0,\ -5,\ 1\ )\,, \\ \vec{a}_4 &=& (\ 2,\ -6,\ 1,\ -1\ )\,. \end{array}$ b) $\begin{array}{lcl} \vec{b}_1 &=& (\ 1,\ -1,\ 2,\ 1\ )\,, \\ \vec{b}_2 &=& (\ 3,\ 1,\ -2,\ 0\ )\,, \\ \vec{b}_3 &=& (\ 1,\ 0,\ -5,\ 1\ )\,, \\ \vec{b}_4 &=& (\ -1,\ -2,\ -1,\ 2\ )\,. \end{array}$

c) $\begin{array}{lcl} \vec{c}_1 &=& (\ 1,\ 1,\ 2,\ 1\ )\,, \\ \vec{c}_2 &=& (\ 3,\ -1,\ -5,\ 2\ )\,, \\ \vec{c}_3 &=& (\ -1,\ -3,\ 1,\ -1\ )\,. \end{array}$ d) $\begin{array}{lcl} \vec{d}_1 &=& (\ 2,\ 1,\ -1,\ 1\ )\,, \\ \vec{d}_2 &=& (\ 1,\ -3,\ -6,\ 4\ )\,, \\ \vec{d}_3 &=& (\ 1,\ 4,\ 5,\ -3\ )\,, \\ \vec{d}_4 &=& (\ 2,\ -2,\ -7,\ 5\ )\,. \end{array}$

1.12. Určeme číslo k tak, aby vektory $\vec{u} = (2\,,\,-1\,,\,3)\,,\vec{v} = (1\,,\,0\,,\,2)\,,\vec{w} = (-1\,,\,2\,,\,k)$ byly lineárně závislé.

Řešení: Chceme určit lineární závislost tří vektorů z $\mathbb{R}^3$. Aby byly vektory lineárně závislé, musí být determinant matice, která má jako řádky vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ roven 0. Tento postup lze použít pouze v případě, že matice je čtvercová.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & k \end{bmatrix}, \qquad \det \mathbf{A} = 0 + 6 + 2 - 0 - 8 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0\,.$$

Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou tedy LZ právě tehdy, když $k = 0$. ♡

◇ Určete číslo k tak, aby vektory byly lineárně závislé.

1.13. a) $\begin{array}{lcl} \vec{a}_1 &=& (\ 1,\ 1,\ 2\ )\,, \\ \vec{a}_2 &=& (\ 3,\ -1,\ k\ )\,, \\ \vec{a}_3 &=& (\ -1,\ -3,\ 1\ )\,. \end{array}$ b) $\begin{array}{lcl} \vec{b}_1 &=& (\ 1,\ -1,\ 2,\ 1\ )\,, \\ \vec{b}_2 &=& (\ 3,\ 1,\ -2,\ 0\ )\,, \\ \vec{b}_3 &=& (\ 1,\ k,\ 0,\ 1\ )\,, \\ \vec{b}_4 &=& (\ -1,\ -3,\ -1,\ 2\ )\,. \end{array}$

c) $\begin{array}{lcl} \vec{c}_1 &=& (\ 5,\ k,\ 2\ )\,, \\ \vec{c}_2 &=& (\ 1,\ -1,\ k\ )\,, \\ \vec{c}_3 &=& (\ -1,\ -3,\ 1\ )\,. \end{array}$ d) $\begin{array}{lcl} \vec{d}_1 &=& (\ 2,\ k-1,\ 2k\ )\,, \\ \vec{d}_2 &=& (\ 3,\ -1,\ 1\ )\,, \\ \vec{d}_3 &=& (\ -1,\ 1-3k,\ 1-2k\ )\,. \end{array}$

1.14. Z vektorů $\vec{a}_1 = (1\,,\,-1\,,\,0\,,\,-2)$, $\vec{a}_2 = (1\,,\,0\,,\,1\,,\,-2)$, $\vec{a}_3 = (-2\,,\,-1\,,\,-3\,,\,4)$ vyberme maximální počet lineárně nezávislých vektorů a zbylé vektory vyjádřeme jako jejich lineární kombinaci.

Řešení: Položme $\alpha\,\vec{a}_1 + \beta\,\vec{a}_2 + \gamma\,\vec{a}_3 = \vec{0}$, tedy

$$\alpha\,(1\,,\,-1\,,\,0\,,\,-2) + \beta\,(1\,,\,0\,,\,1\,,\,-2) + \gamma\,(-2\,,\,-1\,,\,-3\,,\,4) = (0\,,\,0\,,\,0\,,\,0)\,.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Rozepsáním do jednotlivých souřadnic dostaneme

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & - & 2\gamma & = & 0\,, \\ -\alpha & & & - & \gamma & = & 0\,, \\ & + & \beta & - & 3\gamma & = & 0\,, \\ -2\alpha & - & 2\beta & + & 4\gamma & = & 0\,. \end{array}$$

Přičtením vhodného násobku první rovnice k rovnicím dalším dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & - & 2\gamma & = & 0\,, \\ & & \beta & - & 3\gamma & = & 0\,, \\ & & \beta & - & 3\gamma & = & 0\,, \\ & & & & 0 & = & 0\,. \end{array}$$

Vidíme, že např. třetí a čtvrtou rovnici můžeme vynechat, ze druhé rovnice plyne, že $\beta = 3\gamma$, a z první rovnice $\alpha = -\gamma$. Soustava má nekonečně mnoho nenulových řešení $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) = (-t,\, 3t,\, t)$, $t \in \mathbb{R}$, vektory $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ jsou tedy lineárně závislé (protože řešení je závislé na jednom parametru, je zřejmé, že dva vektory musí být lineárně nezávislé).
Zvolíme-li např. $t = 1$ dostaneme $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$ tedy $-\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$, odtud $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$. Vybrali jsme dva nezávislé vektory $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Vektor $\vec{a}_3$ jsme vyjádřili jako jejich lineární kombinaci.
Je zřejmé, že i zde můžeme zvolit jiný postup a využít hodnosti matice. Zapíšeme si opět vektory jako řádky matice $\mathbf{A}$ a Gaussovou eliminací zjistíme, kolik a které vektory jsou lineárně nezávislé.

$$\begin{array}{c} \vec{a}_1: \\ \vec{a}_2: \\ \vec{a}_3: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3 \end{array} .$$

Vektory a_1, a_2 jsou tedy lineárně nezávislé. Zároveň $-\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$, platí tedy $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$. ♡

♢ Z daných vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a zbylé vektory vyjádřete jako jejich lineární kombinaci.

1.15. **a)** $\vec{a}_1 = (1,\ -1,\ 3)$, $\vec{a}_2 = (-3,\ -4,\ 1)$, $\vec{a}_3 = (1,\ -8,\ 13)$.

b) $\vec{b}_1 = (2,\ -1,\ 0)$, $\vec{b}_2 = (3,\ 2,\ -3)$, $\vec{b}_3 = (-1,\ 4,\ -3)$.

c) $\vec{c}_1 = (-1,\ 0,\ 2)$, $\vec{c}_2 = (2,\ 0,\ -4)$, $\vec{c}_3 = (-3,\ 0,\ 6)$.

d) $\vec{d}_1 = (3,\ -2,\ 7)$, $\vec{d}_2 = (2,\ -5,\ 1)$, $\vec{d}_3 = (-2,\ 1,\ 3)$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

1.16. **a)** $\vec{a}_1 = (\ 1,\ -1,\ 2,\ -2\ )$, $\vec{a}_2 = (\ -1,\ 0,\ 3,\ -2\ )$, $\vec{a}_3 = (\ -5,\ 2,\ 5,\ -2\ )$.

b) $\vec{b}_1 = (\ 1,\ -3,\ 0,\ -4\ )$, $\vec{b}_2 = (\ -1,\ 5,\ -1,\ 2\ )$, $\vec{b}_3 = (\ -1,\ 7,\ -2,\ 0\ )$.

c) $\vec{c}_1 = (\ 2,\ -1,\ 0,\ -2\ )$, $\vec{c}_2 = (\ -1,\ -5,\ 3,\ 1\ )$, $\vec{c}_3 = (\ 1,\ 0,\ -1,\ 0\ )$, $\vec{c}_4 = (\ 1,\ 6,\ -5,\ 1\ )$.

d) $\vec{d}_1 = (\ 1,\ -1,\ 0,\ -2,\ 1\ )$, $\vec{d}_2 = (\ -1,\ 4,\ 3,\ 1,\ -5\ )$, $\vec{d}_3 = (\ 1,\ 2,\ 3,\ -3,\ -3\ )$, $\vec{d}_4 = (\ 0,\ 3,\ 3,\ -1,\ -4\ )$.

1.17. Vyšetřeme lineární závislost nebo nezávislost systému funkcí
$f_1(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ z $C(\mathbb{R})$.

Řešení: K vyšetření lineární nezávislosti použijeme Wronského determinant.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x \sin x & \mathrm{e}^x \cos x \\ \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x & \mathrm{e}^x \cos x - \mathrm{e}^x \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{2x}(\sin x \cos x - \sin^2 x) - \mathrm{e}^{2x}(\sin x \cos x + \cos^2 x) = -\mathrm{e}^{2x}(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\mathrm{e}^{2x}.$$

Jelikož existuje $x \in \langle a\,,\, b\rangle$ takové, že $W(x) \neq 0$ (platí to dokonce pro všechna $x \in \mathbb{R}$), systém funkcí je lineárně nezávislý na $\mathbb{R}$.

1.18. Vyšetřeme lineární závislost nebo nezávislost systému prvků z množiny funkcí spojitých na $\langle 0\,,\, a\rangle$, $a > 0$.
$f_1(x) = x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 2$, $f_3(x) = x^2 + 3x + 3$.

Řešení: K vyšetření lineární nezávislosti použijeme Wronského determinant.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 + x + 1 & x^2 + 2x + 2 & x^2 + 3x + 3 \\ 2x + 1 & 2x + 2 & 2x + 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2x^3 + 4x^2 + 4x + 2) + 2(2x^3 + 7x^2 + 9x + 3) + 2(2x^3 + 7x^2 + 10x + 6) -$$

$$-2(2x^3+8x^2+12x+6)-2(2x^3+5x^2+5x+3)-2(2x^3+5x^2+6x+2) = 2(0x^3+0x^2+0x+0) = 0.$$

Wronského determinant je pro všechna x z intervalu $\langle 0\,,\, a\rangle$ rovný nule, takto nemůžeme rozhodnout, zda je systém lineárně závislý nebo nezávislý.
Dokážeme lineární závislost přímo z definice. Položme

$$\alpha\,(x^2 + x + 1) + \beta\,(x^2 + 2x + 2) + \gamma\,(x^2 + 3x + 3) = 0\,.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostaneme
x^2 : $\alpha + \beta + \gamma = 0$,
x^1 : $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$,
x^0 : $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$.
Druhá a třetí rovnice jsou stejné. Vhodnou úpravou dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0\,, \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 0\,. \end{array}$$

Platí tedy $\beta = -2\gamma$, $\alpha = \gamma$ pro libovolné $\gamma \in \mathbb{R}$. Existuje

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

tedy nekonečně mnoho netriviálních lineárních kombinací daných funkcí, které se rovnají nulovému prvku. Dané funkce jsou lineárně závislé. ♡

◇ Vyšetřete lineární závislost nebo nezávislost systému prvků z prostoru $C(I)$. K vyšetření lineární nezávislosti použijte Wronskián.

1.19. **a)** $1\,,\ x\,,\ x^2$ na $I=\mathbb{R}$. **b)** $1\,,\ \mathrm{e}^x\,,\ \mathrm{e}^{2x}\,,\ \mathrm{e}^{3x}$ na $I=\mathbb{R}$.
c) $\sin 2x\,,\ \sin^2 x \operatorname{cotg} x$ na $I=(0,\pi)$. **d)** $x^2\,,\ x^2+2x\,,\ x$ na $I=\mathbb{R}$.

1.3 Báze a dimenze lineárního prostoru

Je-li V lineární prostor, říkáme, že prvky $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\in V$ tvoří **bázi** prostoru V, jestliže splňují následující dvě podmínky:

1. Prvky $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou lineárně nezávislé
2. Pro každý prvek $\boldsymbol{b}\in V$ existují čísla $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ tak, že $\boldsymbol{b}=\alpha_1\,\boldsymbol{a}_1+\dots+\alpha_k\,\boldsymbol{a}_k$.

Počet prvků báze nazýváme **dimenzí** lineárního prostoru V a značíme $\dim V$.

1.20. Z daných vektorů vybereme maximální počet lineárně nezávislých vektorů a doplníme je na bázi lineárního prostoru $\mathbb{R}^5$.

$$\vec{a}_1=(1,\ -1,\ 0,\ 3,\ -2)\,,\quad \vec{a}_3=(1,\ -2,\ -3,\ -1,\ 1)\,,$$
$$\vec{a}_2=(-1,\ 0,\ 4,\ -1,\ 1)\,,\quad \vec{a}_4=(2,\ -1,\ 3,\ 10,\ -7)\,.$$

Řešení: Dané vektory lze považovat za řádkové vektory matice $\mathbf{A}$. Gaussovou metodou určíme její hodnost, která je shodná s maximálním počtem lineárně nezávislých řádkových vektorů.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 4 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -3 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 10 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 4 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -3 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 4 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -7 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 7 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 4 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -7 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A})=3\,.$$

Z výpočtu vyplývá, že vektor $\vec{a}_4$ je lineární kombinací lineárně nezávislých vektorů $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Protože dané vektory jsou z prostoru $\mathbb{R}^5$ ($\dim\mathbb{R}^5=5$), musíme doplnit trojici $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ dvěma vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ tak, aby vektory $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ byly LN a tvořily bazi $\mathbb{R}^5$, tedy např. $\vec{x}=(0\,,0\,,0\,,1\,,0)$ a $\vec{y}=(0\,,0\,,0\,,0\,,1)$ na bázi $\mathbb{R}^5$. ♡

◇ V následujících příkladech vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů a doplňte je na bázi příslušného lineárního prostoru $\mathbb{R}^k$.

1.21. **a)** $\vec{a}_1=(1,\ -1)$, $\vec{a}_2=(-2,\ 2)$. **b)** $\vec{b}_1=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}_2=(2,\ 4,\ 6)$, $\vec{b}_3=(-3,\ -6,\ -9)$. **c)** $\vec{c}_1=(2,\ 0,\ -1)$, $\vec{c}_2=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{c}_3=(-1,\ -3,\ -4)$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

1.22. **a)** $$\begin{array}{rcrrrrl} \vec{a}_1 &=& (\;2, & 1, & -2, & 4 &), \\ \vec{a}_2 &=& (\;-1, & 1, & 3, & 0 &), \\ \vec{a}_3 &=& (\;1, & 5, & 5, & 8 &), \\ \vec{a}_4 &=& (\;4, & -1, & -8, & 4 &). \end{array}$$ **b)** $$\begin{array}{rcrrrrrl} \vec{b}_1 &=& (\;1, & -2, & 1, & -2, & 4 &), \\ \vec{b}_2 &=& (\;-1, & -1, & 1, & 3, & 0 &), \\ \vec{b}_3 &=& (\;2, & 1, & 0, & -3, & 1 &), \\ \vec{b}_4 &=& (\;1, & -1, & -1, & -5, & 5 &). \end{array}$$

1.23. Jsou dány prvky $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3)$. Dokažme, že tvoří bázi $\mathbb{R}^3$, a vyjádřeme prvek $\vec{x} = (2, 1, -1)$ jako lineární kombinaci prvků této báze.

Řešení: Sestavíme matici $\mathbf{A}$, jejíž řádky jsou vektory $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ a vypočteme její determinant.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 6 + 2 + 2 - (2 + 4 + 3) = 1.$$

Determinant je různý od 0, vektory jsou tedy lineárně nezávislé a tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

Hledáme nyní α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tak, aby $\vec{x} = \alpha\,(1, 1, 1) + \beta\,(1, 2, 2) + \gamma\,(1, 2, 3)$ tedy

$$(2, 1, -1) = \alpha\,(1, 1, 1) + \beta\,(1, 2, 2) + \gamma\,(1, 2, 3)\,.$$

(Víme, že tato soustava má právě jedno řešení.)
Odtud dostáváme, že

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\,,\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 1\,,\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = -1 \ \text{ tedy } \ \alpha = 3\,,\ \beta = 1\,,\ \gamma = -2\,.$$

Prvek $\vec{x}$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze: $\vec{x} = 3\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 2\,\vec{a}_3$. ♡

◇ V následujících příkladech zjistěte, zda dané prvky tvoří bázi příslušného prostoru $\mathbb{R}^n$. V kladném případě vyjádřete prvek $\vec{x}$ jako lineární kombinaci prvků této báze.

1.24. **a)** $$\begin{array}{rcrrrl} \vec{a}_1 &=& (\;1, & 2, & -1 &), \\ \vec{a}_2 &=& (\;-2, & 1, & -2 &), \\ \vec{a}_3 &=& (\;4, & 2, & -3 &), \\ \vec{x} &=& (\;-5, & 1, & 0 &). \end{array}$$ **b)** $$\begin{array}{rcrrrrl} \vec{b}_1 &=& (\;1, & 1, & -1, & 1 &), \\ \vec{b}_2 &=& (\;-1, & -1, & 1, & 1 &), \\ \vec{b}_3 &=& (\;1, & -1, & -1, & -1 &), \\ \vec{b}_4 &=& (\;1, & 1, & 1, & 1 &), \\ \vec{x} &=& (\;-2, & 0, & -2, & 2 &). \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrrrrl} \vec{c}_1 &=& (\;1, & 2, & -1, & 1 &), \\ \vec{c}_2 &=& (\;4, & 6, & -3, & -3 &), \\ \vec{c}_3 &=& (\;2, & 0, & -3, & -1 &), \\ \vec{c}_4 &=& (\;0, & 1, & 1, & -2 &), \\ \vec{x} &=& (\;1, & 1, & 1, & -2 &). \end{array}$$ **d)** $$\begin{array}{rcrrrrl} \vec{d}_1 &=& (\;1, & 3, & -1, & 1 &), \\ \vec{d}_2 &=& (\;-2, & -6, & -2, & -1 &), \\ \vec{d}_3 &=& (\;4, & 2, & -3, & -4 &), \\ \vec{d}_4 &=& (\;1, & 1, & 5, & -2 &), \\ \vec{x} &=& (\;-2, & 0, & 9, & 1 &). \end{array}$$

1.25. Tvoří vektory $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, -2, 1)$ bázi lineárního prostoru $\mathbb{R}^4$? Pokud ne, určeme bázi nejmenšího lineárního podprostoru V prostoru $\mathbb{R}^4$, ve kterém tyto vektory leží, a určeme jeho dimenzi.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Řešení: Lineární nezávislost zjistíme pomocí hodnosti matice. Matici $\mathbf{A}$, jejíž řádky jsou vektory $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ upravíme Gaussovou eliminací na horní trojúhelníkový tvar.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektory jsou lineárně závislé, netvoří tedy bázi $\mathbb{R}^4$. Hodnost matice $h(\mathbf{A}) = 3$, tj. maximální počet lineárně nezávislých vektorů je tři. Za bázi prostoru V můžeme zvolit systém vektorů $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, $\dim V = 3$. ♡

♢ V následujících příkladech zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi příslušného lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$? Pokud ne, určete bázi nejmenšího lineárního podprostoru V, ve kterém tyto vektory leží, a určete jeho dimenzi.

1.26. **a)** $\vec{a}_1 = (1, -1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1)$. **b)** $\vec{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (-1, 4, -1)$, $\vec{b}_3 = (1, 8, 5)$. **c)** $\vec{c}_1 = (1 \ \ 2 \ \ -1)$, $\vec{c}_2 = (3 \ \ 6 \ \ -3)$, $\vec{c}_3 = (-2 \ \ -4 \ \ 2)$.

1.27. **a)**
$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (1, -1, 0, 1), \\ \vec{a}_2 &= (-2, 1, 0, -3), \\ \vec{a}_3 &= (1, -5, 2, 0), \\ \vec{a}_4 &= (1, -4, 2, 1). \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= (2, -3, -1, 0, -2), \\ \vec{b}_2 &= (-2, 1, 0, -3, 1), \\ \vec{b}_3 &= (2, -7, 2, 0, -2), \\ \vec{b}_4 &= (6, 3, -7, 6, -4), \\ \vec{b}_5 &= (2, 3, -3, 3, -1). \end{aligned}$$
c)
$$\begin{aligned} \vec{c}_1 &= (1, 1, 2, -1), \\ \vec{c}_2 &= (2, 1, 2, -3), \\ \vec{c}_3 &= (-1, 1, 2, 3), \\ \vec{c}_4 &= (0, -1, -2, -1). \end{aligned}$$
d)
$$\begin{aligned} \vec{d}_1 &= (1, -7, 4, 1, 0), \\ \vec{d}_2 &= (-1, 5, -5, -3, 1), \\ \vec{d}_3 &= (-1, -1, -8, -9, 4), \\ \vec{d}_4 &= (-1, 1, -7, -7, 3), \\ \vec{d}_5 &= (0, -2, -1, -2, 1). \end{aligned}$$

• **1.28.** Dokažme, že množina V všech vektorů z $\mathbb{R}^4$, jejichž součet souřadnic je rovný 0 , je podprostorem lineárního prostoru $\mathbb{R}^4$. Nalezněme nějakou bázi a určeme jeho dimenzi.

Řešení: Zřejmě nulový prvek $\vec{0} = (0, 0, 0, 0) \in V$.
Nechť $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$, tj. $\sum_{i=1}^{4} u_i = \sum_{i=1}^{4} v_i = 0$. Ukážeme, že pak $\vec{u} + \vec{v} \in V$, $\alpha \vec{u} \in V$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_4 + v_4)$ a

$$u_1 + v_1 + \cdots + u_4 + v_4 = u_1 + \cdots + u_4 + v_1 + \cdots + v_4 = 0 + 0 = 0 ,$$

tedy $\vec{u} + \vec{v} \in V$.
$\alpha \vec{u} = (\alpha u_1, \ldots, \alpha u_4)$ a

$$\alpha u_1 + \cdots + \alpha u_4 = \alpha (u_1 + \cdots + u_4) = \alpha \cdot 0 = 0 , \text{ tedy } \alpha \vec{u} \in V.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

V je tedy podprostorem lineárního prostoru $\mathbb{R}^4$. Protože $V \neq \mathbb{R}^4$ (např. $(1, 1, 1, 1) \notin V$), je $\dim V \leq 3$. Vzhledem k tomu, že například vektory $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, -1)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, -1)$ z prostoru V jsou lineárně nezávislé, je $\dim V = 3$. Navíc vektory $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ tvoří bázi V.

$\diamondsuit$ Vyšetřete, zda množina M je podprostorem uvedeného lineárního prostoru. V kladném případě určete dimenzi tohoto podprostoru.

1.29. **a)** $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 , \ \vec{x} = (x_1 , x_1 , x_1)\}$.
b) $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 , \ \vec{x} = (x_1 , 0 , x_3 , 0)\}$.
c) $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 , \ \vec{x} = (x_1 , 0 , x_3 , 3)\}$.
d) $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 , \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
e) $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 , \ x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0\}$.
f) $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^6 , \ \vec{x} = (x_1 , x_2 , x_3 , x_1 , x_2 , x_3)\}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

2 Lineární zobrazení

Nechť U a V jsou lineární prostory. Zobrazení $L : U \longrightarrow V$ nazveme **lineárním**, jestliže

$$\begin{array}{lll} 1) & L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v}) & \text{pro každé } \ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in U \ , \\ 2) & L(\alpha \cdot \boldsymbol{u}) = \alpha \cdot L(\boldsymbol{u}) & \text{pro každé } \ \boldsymbol{u} \in U, \ \alpha \in \mathbb{R} \ . \end{array}$$

Poznámka: $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic reálných čísel. Pro účely této kapitoly nebudeme rozlišovat mezi zápisem vektoru $\vec{x}$ jako řádek nebo sloupec. Při maticovém násobení budeme však vektor $\vec{x}$ chápat jako sloupcový vektor.

2.1 Vlastnosti lineárního zobrazení

Zobrazení $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární právě tehdy, když exituje taková matice $\mathbf{A}$, že

$$L(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \ \text{ pro každé } \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ .$$

2.1. Zjistěte, zda je zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$L(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) = (x_1 + 2x_2\,,\, x_1 - \, x_3\,,\, 2x_2\,,\, x_1)$$

lineární. V kladném případě najděte matici $\mathbf{A}$ reprezentující toto zobrazení. Najděte jádro $\mathcal{N}(L)$ a zjistěte, zda L je prosté zobrazení a zda je to zobrazení na $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Nechť $\vec{x} = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{y} = (y_1\,,\, y_2\,,\, y_3) \in \mathbb{R}^3$, α , $\beta \in \mathbb{R}$. Potom

$$L(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = L(\alpha\, x_1 + \beta\, y_1, \alpha\, x_2 + \beta\, y_2, \alpha\, x_3 + \beta\, y_3) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)\,,\, \alpha + \beta y_1 - \, (\alpha x_3 + \beta y_3)\,,\, 2(\alpha x_2 + \beta y_2)\,,\, \alpha x_1 + \beta y_1) =$$

$$= \alpha\,(x_1 + 2x_2\,,\, x_1 - x_3\,,\, 2x_2\,,\, x_1) + \,\beta\,(y_1 + 2y_2\,,\, y_1 - y_3\,,\, 2y_2\,,\, y_1) =$$

$$= \alpha L(\vec{x}) + \beta L(\vec{y}) \ .$$

Zobrazení L je lineární (to jsme dokázali přímo z definice).

Protože $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, je matice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hledanou maticí reprezentující zobrazení L . Nalezením matice jsme také dokázali, že zobrazení je lineární. Nyní najdeme jádro $\mathcal{N}(L) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 ;\ L(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Je-li $L(\vec{x}) = \vec{0}$, pak $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $2x_2 = 0$, $x_1 = 0$. Tato soustava má jediné řešení $\vec{x} = \vec{0}$, tedy $\mathcal{N}(L) = \{\,\vec{0}\,\}$. Protože $\mathcal{N}(A) = \{\,\vec{0}\,\}$ je $h(\mathbf{A}) = 3$. Zobrazení L je prosté a na $\mathbb{R}^3$ (viz [MII], věta 2.18).♡

2.2. Zjistěte, zda je zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad L(x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) = (x_1 + x_2 + 1\,,\, x_3 + 1)$ lineární.

Řešení: Nechť $\vec{x} = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\ \vec{y} = (y_1\,,\, y_2\,,\, y_3) \in \mathbb{R}^3\,,\ \alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned}
L(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= L(\alpha\, x_1 + \beta\, y_1, \alpha\, x_2 + \beta\, y_2, \alpha\, x_3 + \beta\, y_3) = \\
&= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + 1\,,\, \alpha x_3 + \beta y_3 + 1) \\
\alpha L(\vec{x}) + \beta L(\vec{y}) &= \alpha\,(x_1 + x_2 + 1\,,\, x_3 + 1) \,+\, \beta\,(y_1 + y_2 + 1\,,\, y_3 + 1) = \\
&= (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha\,,\, \alpha x_3 + \alpha) \,+\, (\beta y_1 + \beta y_2 + \beta\,,\, \beta y_3 + \beta) = \\
&= (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2 + \alpha + \beta\,,\, \alpha x_3 + \beta y_3 + \alpha + \beta)
\end{aligned}$$

Porovnáním vztahů zjistíme, že $L(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \neq \alpha L(\vec{x}) + \beta L(\vec{y})$. Zobrazení L není proto lineární. ♡

◇ Zjistěte, zda je dané zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, lineární, v kladném případě najděte matici $\mathbf{A}$ reprezentující toto zobrazení. Najděte jádro $\mathcal{N}(L)$ a zjistěte, zda L je prosté zobrazení a zda je to zobrazení na $\mathbb{R}^m$.

2.3. **a)** $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;\ L(x_1,\, x_2) = (x_1 + x_2,\, x_1 + x_2)$.

b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;\ L(x_1,\, x_2) = (x_1 + x_2,\, x_1\, x_2)$.

c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;\ L(x_1,\, x_2) = (x_1 + x_2,\, x_1 - x_2)$.

d) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,;\ L(x_1,\, x_2) = (x_1 + x_2,\, x_1 - x_2,\, 2\, x_1)$.

e) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ L(x_1,\, x_2) = (x_1 + x_2)$.

2.4. **a)** $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\,;\ L(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\, x_2 + x_3,\, x_1 + 3x_2,\, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,;\ L(x_1,\, x_2,\, x_3) = (3x_1 + 2x_2 - x_3,\, x_1 + x_2 + x_3,\, x_1 + 3x_2 + x_3)$.

c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\,;\ L(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1 + x_3,\, x_2 + x_3,\, x_1 + x_2,\, x_1 + 1)$.

d) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\,;\ L(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (x_1 + x_4,\, x_2 + x_4,\, x_1 - 2x_2 - x_4)$.

e) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2\,;\ L(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (x_1\, x_3,\, x_2\, x_4)$.

2.5. Zjistěme, zda zobrazení $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

je lineární a prosté, v kladném případě nalezněte matici inverzního zobrazení.

Řešení:

Protože $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, je matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

hledanou maticí reprezentující zobrazení L . Zobrazení L je tedy lineární. Platí, že $\det \mathbf{A} = 1$. Protože $\det \mathbf{A} \neq 0$ tj. $h(\mathbf{A}) = 4$, zobrazení je prosté, existuje tedy inverzní matice k matici $\mathbf{A}$. Nyní vypočteme Gaussovou-Jordanovou eliminací inverzní matici k matici $\mathbf{A}$.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{E}] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Matice inverzního zobrazení má tvar $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. ♡

◇ V následujících příkladech zjistěte, zda zobrazení L z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^4$ je lineární a prosté. Kde to lze, nalezněte matici reprezentující inverzní zobrazení.

2.6. **a)** $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2, x_2 + x_3, x_2, x_4)$.

b) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 0, x_3 + x_4)$.

c) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_4)$.

d) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_4, x_1 + 3x_4, x_1 + x_2 - 2x_4)$.

e) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3)$.

2.7. Najděte inverzní zobrazení k lineárnímu zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_3, 2x_2 - x_3)$$

a vektor $\vec{x}$, pro který je $L(\vec{x}) = (1, -1, 1)$.

Řešení: K nalezení inverzního zobrazení využijeme matici reprezentující inverzní zobrazení.

Protože $\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, je matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ hledanou maticí reprezentující zobrazení L . Zobrazení L je tedy lineární. $\det \mathbf{A} = 5 (\det \mathbf{A} \neq 0) \Rightarrow$ zobrazení je prosté a existuje inverzní matice k matici $\mathbf{A}$. Nyní vypočteme Gaussovou-Jordanovou eliminací inverzní matici k matici $\mathbf{A}$.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{E}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -2/5 & -3/5 \end{array}\right].$$

Matice inverzního zobrazení má tvar $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & -3/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -2/5 & -3/5 \end{bmatrix}$.

Inverzní matice můžeme vypočítat také pomocí determinantů (viz [MII], věta 2.20). Vypočteme nejprve všechny algebraické doplňky:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Protože $\det \mathbf{A} = 5$, dostáváme inverzní matici:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}^{-1}$ je matice reprezentující inverzní zobrazení L^{-1}. Platí:

$$L^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Platí: $\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}y_1 & +\frac{3}{5}y_2 & -\frac{3}{5}y_3 \\ \frac{1}{5}y_1 & -\frac{1}{5}y_2 & +\frac{1}{5}y_3 \\ \frac{2}{5}y_1 & -\frac{2}{5}y_2 & -\frac{3}{5}y_3 \end{bmatrix}$. Inverzní zobrazení k zobrazení L je dáno vztahem

$$L^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (\frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3, \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3, \frac{2}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3).$$

Nyní najdeme vektor $\vec{x}$, pro který platí $L(\vec{x}) = (1,\,-1,\,1)$. Platí $\vec{x} = L^{-1}(1,\,-1,\,1)$, je $\mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & -3/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$, hledaný vektor je $\vec{x} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$. ♡

◊ Najděte inverzní matici k matici $\mathbf{A}$.

2.8. **a)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$. **d)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 2x & 1 \\ 3x & 1 & 0 \\ -x & x & 0 \end{bmatrix}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ Najděte matici inverzního zobrazení k lineárnímu zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a vektor $\vec{x}$, pro který je $L(\vec{x}) = \vec{u}$.

2.9. **a)** $L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$; $\quad \vec{u} = (1, 2)$.

b) $L(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2)$; $\quad \vec{u} = (1, 1)$.

c) $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 - x_3)$; $\quad \vec{u} = (1, -2, 3)$.

d) $L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, -4x_1 + 2x_2 + x_3)$; $\quad \vec{u} = (1, -1, 0)$.

e) $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 5x_1 - x_2 - x_3, -4x_1 + 2x_2 + 7x_3)$; $\quad \vec{u} = (1, 2, 1)$.

2.10. Vyšetřeme, zda zobrazení $L(f) = f'$, $f \in C^1(a, b)$, je lineární zobrazení a charakterizujme obor hodnot $\mathcal{H}(L)$. Dále najděme jádro $\mathcal{N}(L)$ zobrazení L. Je zobrazení L prosté?

Řešení: Nechť $f, g \in C^1(a, b), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $L(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha L(f) + \beta L(g)$, zobrazení L je lineární. Nyní najdeme obor hodnot $\mathcal{H}(L)$. Platí: je-li $f \in C^1(a, b)$, potom $f' \in C(a, b)$. Naopak, je-li funkce $g \in C(a, b)$, pak existuje primitivní funkce G k funkci g a $G' = g$. Platí tedy, že $G \in C^1(a, b)$. Obor hodnot $\mathcal{H}(L)$ je prostor $C(a, b)$.
$f \in \mathcal{N}(L) \Leftrightarrow L(f) = f' = o \Leftrightarrow f(x) = \int 0 \, \mathrm{d}x = C$, $C \in \mathbb{R}$, f je libovolná konstantní funkce na $\langle a, b \rangle$.
$\mathcal{N}(L) = \{f \in C^1(a, b),\ f(x) = C \text{ pro všechna } x \in \langle a, b \rangle\} \Rightarrow \mathcal{N}(L) \neq \{\boldsymbol{o}\}$, tj. zobrazení není prosté. $\heartsuit$

$\diamondsuit$ V následujících příkladech vyšetřete, zda zobrazení L prostoru $C^r(a, b)$ do prostoru $C(a, b)$ je lineární zobrazení.

2.11. **a)** $L(f) = f'' + f' - f$, $f \in C^2(a, b)$. **b)** $L(f) = f' + 3$, $f \in C^1(a, b)$.

c) $L(f) = f'' f' + f^2$, $f \in C^2(a, b)$. **d)** $L(f) = f' - 5f$, $f \in C^1(a, b)$.

$\diamondsuit$ V následujících příkladech vyšetřete, zda zobrazení L prostoru $C^1(a, b)$ do prostoru V je lineární a charakterizujte obor hodnot $\mathcal{H}(L)$. Dále najděte jádro $\mathcal{N}(L)$ zobrazení L. Je zobrazení L prosté?

2.12. **a)** $L(f) = \max\limits_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x)|$, $V = \mathbb{R}$. **b)** $L(f) = f(a) + f(b)$, $V = \mathbb{R}$.

c) $L(f) = f'(\frac{a+b}{2})$, $V = \mathbb{R}$. **d)** $L(f) = |f'|$
V je prostor všech funkcí definovaných na (a, b).

2.2 Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Číslo λ je vlastním číslem čtvercové matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\mathbf{A}\vec{h} = \lambda \vec{h}$. Každý takový nenulový vektor $\vec{h}$ nazýváme vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

2.13. Najděte všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Řešení: Platí $\mathbf{A}\vec{h} = \lambda\vec{h} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{h} = \vec{0}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Soustava $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{h} = \vec{0}$ pro nenulový vektor $\vec{h}$ má nenulové řešení, jestliže matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ je singulární, tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 9\,\lambda - \lambda^3 = \lambda(9 - \lambda^2) = 0 .$$

Rovnice $\lambda(9 - \lambda^2) = 0$ má tři různá řešení: $\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 3 , \ \lambda_3 = -3$. Vlastní čísla matice jsou: $\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 3 , \ \lambda_3 = -3$. Vypočtěme příslušné vlastní vektory. Položme $\vec{h} = (x \, , \, y \, , \, z)$.
Pro $\lambda_1 = 0$ musí platit $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{h}_1 = \vec{0}$, dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & & & = & 0 . \end{array}$$

Jejím nenulovým řešením jsou všechny vektory $\vec{h}_1 = k\,(4 \, , \, 6 \, , \, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tj. všechny příslušné vlastní vektory k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$.
Pro $\lambda_2 = 3$ musí platit $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{h}_2 = \vec{0}$, dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & 0 , \end{array}$$

Jejím řešením jsou vektory $\vec{h}_2 = k\,(1 \, , \, 0 \, , \, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tj. všechny příslušné vlastní vektory k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$.
Pro $\lambda_3 = -3$ musí platit $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{h}_3 = \vec{0}$, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 0 , \end{array}$$

Jejím řešením jsou vektory $\vec{h}_3 = k\,(-1 \, , \, 6 \, , \, 5)$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tj. všechny příslušné vlastní vektory k vlastnímu číslu $\lambda_3 = -3$. ♡

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

♢ V následujících příkladech najděte všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

2.14. **a)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. **d)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. **f)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **h)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.3 Maticové rovnice

2.15. Řešme maticovou rovnici $\mathbf{XA} + \mathbf{B} = \mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Rovnici vyřešíme nejprve obecně.

$$\mathbf{XA} + \mathbf{B} = \mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{XE} - \mathbf{XA} = \mathbf{X}(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1},$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Předpokládáme, že existuje inverzní matice $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$. Je důležité si uvědomit, že maticí $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ je nutno násobit zprava! Nyní vypočítejme $\mathbf{E} - \mathbf{A}$, $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ a pomocí nich X.

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proto $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

♡

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ V následujících příkladech vypočtěte z maticové rovnice neznámou matici $\mathbf{X}$.

2.16. a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\mathbf{A}^2\mathbf{X} - 6\mathbf{B} = \mathbf{AX}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $\mathbf{AXB} - \mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

e) $\mathbf{AX} - 2\mathbf{B} = \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

f) $\mathbf{AXB} - 2\mathbf{A} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

g) $\mathbf{AX} - 4\mathbf{B} = 2\mathbf{X}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

3 Lineární diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice 1. řádu byly procvičovány v předmětu Matematika I, viz. skripta [MI], kapitola 8. Nyní navážeme lineárními diferenciálními rovnicemi 2. a vyššího řádu. Teorii k těmto rovnicím nalezneme ve skriptech [MII], kapitola 3.

3.1 Řešení diferenciálních rovnic

Řešením diferenciální rovnice rozumíme takovou **funkci** $y = y(x)$ definovanou na **intervalu** I, že po dosazení do rovnice za y a její derivace dostaneme rovnost platnou pro všechna $x \in I$.

3.1. Rozhodněme, zda funkce $y(x) = c \cdot \sin(\ln x)$, $x \in (0, \infty)$, kde c je libovolná reálná konstanta, je řešením diferenciální rovnice $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0$.

Řešení: Derivace funkce y jsou: $y'(x) = \frac{c}{x}\cos(\ln x)$ a $y''(x) = -\frac{c}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{c}{x^2}\sin(\ln x)$, $x \in (0, \infty)$. Dosadíme za y'', y' a y do levé strany diferenciální rovnice. Dostáváme

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = -\frac{c}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{c}{x^2}\sin(\ln x) + \frac{c}{x^2}\cos(\ln x) + \frac{c}{x^2}\sin(\ln x) = 0$$

Levá strana rovnice se rovná nule pro všechna $x \in (0, \infty)$ nezávisle na c, tedy pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $y(x)$ řešením dané diferenciální rovnice. ♡

3.2. Rozhodněme, zda funkce $y(x) = -\dfrac{1+x}{x}\ln(1+x)$, $x \in (0, \infty)$ je řešením diferenciální rovnice $y'' + \dfrac{2}{x}y' = \dfrac{1}{x^2 + x^3}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(1) = -\ln 4$, $y'(1) = \ln 2 - 1$.

Řešení: Derivace funkce y je: $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$. Pro $x = 1$ je $y(1) = -2\ln 2 = -\ln 4$ a $y'(1) = \ln 2 - 1$, tj. funkce $y(x) = -\dfrac{1+x}{x}\ln(1+x)$ vyhovuje daným počátečním podmínkám. Její druhá derivace je:

$$y''(x) = -\frac{2}{x^3}\ln(1+x) + \frac{1}{x^2 + x^3} + \frac{1}{x^2}\,,\ x \in (0, \infty)\,.$$

Dosadíme za y' a y'' do levé strany diferenciální rovnice. Dostáváme

$$y'' + \frac{2}{x}y' = -\frac{2}{x^3}\ln(1+x) + \frac{1}{x^2 + x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\ln(1+x) - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2 + x^3} - \frac{1}{x^2}$$

Levá strana rovnice se nerovná pravé $\dfrac{1}{x^2 + x^3}$, tedy funkce $y(x)$ není řešením dané diferenciální rovnice. ♡

$\diamondsuit$ Podobně řešte další příklady. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je nebo není daná funkce řešením příslušné diferenciální rovnice, resp. počáteční úlohy, resp. okrajové úlohy.

3.3. **a)** $y(x) = \dfrac{c_1 + c_2 \ln x}{x}$, $x > 0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; $\quad x^2y'' + 3xy' + y = 0.$

b) $y(x) = \sin x^2$, $x > 0$; $\quad y'' - \dfrac{y'}{x} + 4x^2y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0.$

c) $y(x) = \mathrm{e}^{2x} + x$, $x < 1$; $\quad (x-1)y'' - xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3.$

d) $y(x) = x + \sin x + 3\cos x + c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
$2y'' + 3y' + y = x + 10\sin x.$

e) $y(x) = x + \dfrac{x}{4}\sin x - \dfrac{x^2}{4}\cos x$, $x \in \mathbb{R}$;
$y'' + y = x(1 + \sin x)$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{5}{8}\pi.$

f) $y(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^{x} + c_2(1+x)$, $x > 0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
$xy'' - (1+x)y' - y = 2(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}.$

g) $y(x) = c_1x + c_2x^2 + 4x^2\ln x$, $x > 0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; $\quad y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = 4.$

h) $y(x) = 4x - (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$, $x < 0$;
$(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$, $y(-\ln 3) = 3 + \ln 9$, $y(\ln 0,5) = 2.$

3.2 Klasifikace diferenciálních rovnic

Lineární diferenciální rovnice (LDR) n-tého řádu je rovnice tvaru

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}(x)\,y'' + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)\,,$$

kde pravá strana $b(x)$ a koeficienty $a_i(x)$, $i = 0\ldots n$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu I, $a_0(x) \neq 0$. Jsou-li koeficienty LDR konstantní funkce (tj. $a_i(x) = k_i \in \mathbb{R}$, $i = 0\ldots n$), nazývá se rovnice s konstantními koeficienty. Je-li pravá strana rovnice $b(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, nazývá se rovnice homogenní (HLDR), v opačném případě nehomogenní (NLDR).

3.4. Rozhodněme, zda daná diferenciální rovnice je lineární. Pokud ano, určeme její řád a rozhodněme, zda je homogenní nebo nehomogenní, zda má konstantní koeficienty.

a) $y'' + \mathrm{e}^x\,y = \ln x.$ **b)** $(x+y)y'' = \sin x.$

c) $2y''' - y' = 0.$ **d)** $xy'' + y' - x^2\,y - 7 = 0.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Řešení:

a) Diferenciální rovnice $y'' + \mathrm{e}^x y = \ln x$ je lineární, 2. řádu s koeficienty $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = \mathrm{e}^x$, tedy nejsou konstantní. Je nehomogenní s pravou stranou $b(x) = \ln x$.

b) Diferenciální rovnice $(x + y)y'' = \sin x$ není lineární, protože y'' je násobeno funkcí nejen proměnné x, ale také y.

c) Diferenciální rovnice $2y''' - y' = 0$ je lineární, 3. řádu s konstantními koeficienty $a_0(x) = 2$, $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = -1$, $a_3(x) = 0$. Je homogenní.

d) Diferenciální rovnice $xy'' + y' - x^2 y - 7 = 0$ je lineární, 2. řádu s koeficienty $a_0(x) = x$, $a_1(x) = 1$, $a_2(x) = -x^2$, které nejsou konstantní. Je nehomogenní s pravou stranou $b(x) = 7$. ♡

♢ V dalších příkladech analogicky rozhodněte a zdůvodněte, zda je daná diferenciální rovnice lineární. Určete její řád a rozhodněte, zda je homogenní nebo nehomogenní, zda má konstantní koeficienty.

3.5.
a) $y'' + 3y' - y = 0.$
b) $x\,y'' - y' + 4x^3\,y = 0.$
c) $y''' - y = 2x \cos x.$
d) $7y' - x\,\mathrm{e}^x = 0.$
e) $y^{(4)} + 2y'' - xy = 0.$
f) $y'' + 2(y')^2 = \mathrm{e}^x.$
g) $y' + 2y = x^3.$
h) $(1 - x)\,y'' + xy' - y - 2(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$
i) $y'' - 2yy' = 0.$
j) $4y^{(4)} - 3y''' = 0.$
k) $y'(1 - x) = 1 + y.$
l) $2y'' + 3y' + y = x + 10 \sin x.$

3.3 Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Obecné řešení HLDR n-tého řádu s konstantními koeficienty

$$k_0\,y^{(n)} + k_1\,y^{(n-1)} + \ldots + k_{n-2}\,y'' + k_{n-1}\,y' + k_n\,y = 0,\ \ k_0 \neq 0,$$

má tvar

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + \ldots + C_n\,y_n(x),\ \ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1 \ldots n,$$

kde funkce $y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislá řešení, neboli tvoří fundamentální systém řešení této rovnice.

3.6. Ověřme, že dané funkce řeší příslušnou diferenciální rovnici. Rozhodněme, zda tyto funkce tvoří fundamentální systém řešení.

a) $y_1(x) = \sin 5x,\ \ y_2(x) = \cos 5x,\ \ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' + 25y = 0.$

b) $y_1(x) = \mathrm{e}^{3x},\ \ y_2(x) = 7\,\mathrm{e}^{3x},\ \ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' + y' - 12y = 0.$

c) $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x},\ \ y_2(x) = \mathrm{e}^{2x},\ \ y_3(x) = x\,\mathrm{e}^{2x},\ \ x \in \mathbb{R};$ $\quad y''' - 3y'' + 4y = 0.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Řešení:

a) Druhé derivace daných funkcí $y_1(x) = \sin 5x$, $y_2(x) = \cos 5x$ jsou: $y_1''(x) = -25\sin 5x$, $y_2''(x) = -25\cos 5x$. Dosadíme za y'' a y do levé strany rovnice $y'' + 25y = 0$.

$$y_1: \quad y'' + 25y = -25\sin 5x + 25\sin 5x = 0$$

$$y_2: \quad y'' + 25y = -25\cos 5x + 25\cos 5x = 0$$

Levá strana rovnice se pro obě funkce rovná nule pro všechna reálná x, tedy funkce y_1, y_2 jsou řešení diferenciální rovnice $y'' + 25y = 0$. Rovnice je lineární 2. řádu, proto fundamentální systém řešení tvoří dvě lineárně nezávislá řešení. Zkusme pomocí Wronského determinantu vyšetřit, viz odstavec 1.2, zda jsou řešení lineárně nezávislá. Jejich Wronskián je:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin 5x & \cos 5x \\ 5\cos 5x & -5\sin 5x \end{vmatrix} = -5\sin^2 5x - 5\cos^2 5x = -5 \neq 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy fundamentální systém řešení.

b) První a druhé derivace zadaných funkcí $y_1(x) = \mathrm{e}^{3x}$, $y_2(x) = 7\,\mathrm{e}^{3x}$ jsou: $y_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$, $y_1''(x) = 9\mathrm{e}^{3x}$, $y_2'(x) = 21\mathrm{e}^{3x}$, $y_2''(x) = 63\mathrm{e}^{3x}$. Dosadíme za y'', y' a y do levé strany rovnice $y'' + y' - 12y = 0$.

$$y_1: \quad y'' + y' - 12y = 9\mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{3x} - 12\mathrm{e}^{3x} = 0$$

$$y_2: \quad y'' + y' - 12y = 63\mathrm{e}^{3x} + 21\mathrm{e}^{3x} - 12 \cdot 7\mathrm{e}^{3x} = 0$$

Levá strana rovnice se pro obě funkce rovná nule pro všechna reálná x, tedy funkce y_1, y_2 jsou řešení diferenciální rovnice $y'' + y' - 12y = 0$. Rovnice je lineární 2. řádu. Snadno nahlédneme, že $7\,y_1(x) - y_2(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. netriviální lineární kombinace funkcí y_1, y_2 je rovna nulové funkci. Funkce jsou lineárně závislé, proto nemohou tvořit fundamentální systém řešení.

c) Druhé a třetí derivace zadaných funkcí $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_3(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ jsou: $y_1''(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $y_1'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, $y_2''(x) = 4\mathrm{e}^{2x}$, $y_2'''(x) = 8\mathrm{e}^{2x}$, $y_3''(x) = \mathrm{e}^{2x}(4 + 4x)$, $y_3'''(x) = \mathrm{e}^{2x}(12 + 8x)$. Dosadíme za y''', y'' a y do levé strany diferenciální rovnice $y''' - 3y'' + 4y = 0$.

$$y_1: \quad y''' - 3y'' + 4y = -\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$y_2: \quad y''' - 3y'' + 4y = 8\mathrm{e}^{2x} - 3 \cdot 4\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{2x} = 0$$

$$y_3: \quad y''' - 3y'' + 4y = \mathrm{e}^{2x}(12 + 8x) - 3\,\mathrm{e}^{2x}(4 + 4x) + 4\,x\mathrm{e}^{2x} = 0$$

Levá strana rovnice se pro všechny tři funkce rovná nule pro všechna reálná x, tedy funkce y_1, y_2, y_3 jsou řešení diferenciální rovnice $y''' - 3y'' + 4y = 0$. Rovnice je lineární 3. řádu, proto fundamentální systém řešení tvoří tři lineárně nezávislá řešení. Zkusme pomocí Wronského determinantu vyšetřit, zda jsou řešení lineárně nezávislá. Jejich Wronskián je:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x}(1 + 2x) \\ \mathrm{e}^{-x} & 4\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x}(4 + 4x) \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & 1 + 2x \\ 1 & 4 & 4 + 4x \end{vmatrix} = 9\,\mathrm{e}^{3x} \neq 0.$$

Funkce y_1, y_2, y_3 jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy fundamentální systém. ♡

$\diamondsuit$ V následujících příkladech ověřte, že dané funkce řeší příslušnou diferenciální rovnici. Pak rozhodněte, zda tyto funkce tvoří fundamentální systém řešení.

3.7. **a)** $y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x},\ y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x},\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' + 4y' + 4y = 0.$

b) $y_1(x) = \mathrm{e}^{x},\ y_2(x) = \mathrm{e}^{3x},\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' - 4y' + 3y = 0.$

c) $y_1(x) = 2\mathrm{e}^{4x},\ y_2(x) = -6\,\mathrm{e}^{4x},\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' - 8y' + 16y = 0.$

d) $y_1(x) = \mathrm{e}^{x}\cos x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{x}\sin x,\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' - 2y' + 2y = 0.$

e) $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x},\ y_2(x) = \sin 3x,\ y_3(x) = \cos 3x,\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y''' + y'' + 9y' + 9y = 0.$

f) $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x},\ y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x},\ y_3(x) = 2x\,\mathrm{e}^{2x},\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

g) $y_1(x) = \mathrm{e}^{ax},\ y_2(x) = \mathrm{e}^{bx},\ a \neq b,\ a, b \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' - (a+b)y' + aby = 0.$

h) $y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x},\ y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R};$ $\quad y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0.$

Charakteristická rovnice HLDR

Na rovnici 2. řádu
$$k_0\, y'' + k_1\, y' + k_2\, y = 0,\ k_0 \neq 0,$$
ukážeme, jak se hledá $y_1(x)$, $y_2(x)$, fundamentální systém řešení HLDR s konstantními koeficienty. Vypočteme kořeny tzv. charakteristické rovnice
$$k_0\,\lambda^2 + k_1\,\lambda + k_2 = 0,$$
kterou dostaneme tak, že v diferenciální rovnici nahradíme y neznámou λ. Mocnina neznámé λ číselně odpovídá řádu derivace funkce y. Mohou nastat tři případy, jak vypadá fundamentální systém y_1, y_2. Má-li charakteristická rovnice

(i) dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$,

(ii) jeden dvojnásobný reálný kořen λ, pak $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ a $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$,

(iii) dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = a + b\,i$, $\lambda_2 = a - b\,i$, pak $y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos bx$ a $y_2(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$.

Pro homogenní LDR vyšších řádů, resp. prvního řádu je postup analogický.

3.8. Nalezněme obecné řešení lineárních diferenciálních rovnic:

a) $4y'' - 4y' + y = 0,$ **b)** $3y'' + 2y' - y = 0,$ **c)** $y'' + 4y' + 13y = 0.$

Řešení: Hledejme $y_1(x)$, $y_2(x)$ fundamentální systém řešení HLDR 2. řádu. Pak obecné řešení má tvar $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. Definiční obor $y(x)$ je vždy $\mathbb{R}$.

a) Charakteristická rovnice diferenciální rovnice $4y''-4y'+y = 0$ je $4\lambda^2-4\lambda+1 = 0$. Její kořeny jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Tedy fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ a obecné řešení dané HLDR je
$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Charakteristická rovnice diferenciální rovnice $3y'' + 2y' - y = 0$ je $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$. Její kořeny jsou $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$. Tedy fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a obecné řešení dané HLDR je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{3}} + C_2\, \mathrm{e}^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Charakteristická rovnice diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 13y = 0$ je $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. Její kořeny jsou $\lambda_1 = -2 + 3\,i$, $\lambda_2 = -2 - 3\,i$. Tedy fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cos 3x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin 3x$ a obecné řešení dané HLDR je

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} \cos 3x + C_2\, \mathrm{e}^{-2x} \sin 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \heartsuit$$

3.9. Nalezněme obecné řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu $-5y' + 7y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $-5\lambda + 7 = 0$ má jeden kořen $\lambda = \frac{7}{5}$. Fundamentální systém řešení HLDR 1. řádu tvoří jedna funkce. V tomto případě $y_1(x) = \mathrm{e}^{\frac{7}{5}x}$ a tedy obecné řešení je

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{7}{5}x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}. \qquad \heartsuit$$

$\diamondsuit$ Nalezněte obecné řešení následujících lineárních diferenciálních rovnic.

3.10.

a) $y'' - 3y' - 28y = 0.$	**b)** $y'' - 6y' + 13y = 0.$
c) $10y' = 0.$	**d)** $y'' + y = 0.$
e) $6y'' - 5y' + y = 0.$	**f)** $3y'' = 0.$
g) $y'' + 6y' + 9y = 0.$	**h)** $4y'' - 3y' = 0.$
i) $y'' - 8y' + 16y = 0.$	**j)** $y'' + 8y' + 25y = 0.$
k) $9y'' + 6y' + y = 0.$	**l)** $y'' - 2ay' + (a^2 - b^2)y = 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$
m) $y' - 2y = 0.$	**n)** $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$

• **3.11.** Nalezněme obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 3. řádu

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0\,.$$

Řešení: Postupujeme analogicky jako v předchozích příkladech. Charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$. Buď jeden kořen rovnice uhádneme $(\lambda = 2)$ a polynom na levé straně rovnice dělením převedeme na součin činitele $\lambda - 2$ a kvadratického polynomu nebo provedeme následující algebraické úpravy:

$$\begin{aligned}\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 &= \lambda^3 - 2^3 - 6\lambda(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) - 6\lambda(\lambda - 2) = \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)^2 = (\lambda - 2)^3\end{aligned}$$

Charakteristická rovnice $(\lambda - 2)^3 = 0$ má jeden trojnásobný reálný kořen $\lambda = 2$. Fundamentální systém řešení tvoří tři funkce

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}, \qquad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad y_3(x) = x^2\,\mathrm{e}^{2x}$$

a tedy becné řešení dané HLDR je

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{2x} + C_3\,x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,. \qquad \heartsuit$$

$\diamondsuit$ Nalezněte obecné řešení následujících lineárních diferenciálních rovnic.

• **3.12.** **a)** $y''' + y'' - 2y' = 0$. **b)** $y^{(4)} + y''' - 12y'' = 0$.

c) $y''' - 4y'' + 5y' = 0$. **d)** $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$.

e) $y^{(4)} + 8y'' - 9y = 0$. **f)** $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$.

g) $y^{(4)} - y = 0$. **h)** $y^{(4)} + y''' - 2y'' + 4y' - 24y = 0$.

i) $y''' + y'' - 10y' + 8y = 0$. **j)** $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0$.

Počáteční a okrajové úlohy

3.13. Nalezněme řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + 25y = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$. Proveďme zkoušku.

Řešení: Nejprve nalezneme obecné řešení. Pak ze všech řešení vybereme to, které vyhovuje počátečním podmínkám. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 25 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 5\,i$. Tedy obecné řešení dané HLDR je

$$y(x) = C_1\,\cos 5x + C_2\,\sin 5x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Určíme konstanty C_1, C_2 (v případě počátečních podmínek vždy existuje právě jedna taková dvojice) tak, aby řešení splňovalo zadané počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$. Spočtěme derivaci obecného řešení: $y'(x) = -5\,C_1\,\sin 5x + 5\,C_2\,\cos 5x$. Dosaďme počáteční podmínky do $y(x)$, $y'(x)$:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1\,\cos 0 + C_2\,\sin 0 \\ -5 &= y'(0) = -5\,C_1\,\sin 0 + 5\,C_2\,\cos 0 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} 1 &= C_1 \\ -5 &= 5C_2 \end{aligned}$$

Hledané partikulární řešení má $C_1 = 1$ a $C_2 = -1$, tedy

$$y(x) = \cos 5x - \sin 5x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zkouška: Spočtěme první a druhou derivaci nalezeného partikulárního řešení: $y'(x) = -5\sin 5x - 5\cos 5x$ a $y''(x) = -25\cos 5x + 25\sin 5x$. V bodě $x = 0$ je $y(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1$ a $y'(0) = -5\sin 0 - 5\cos 0 = -5$, tj. ověřili jsme, že nalezené řešení splňuje počáteční podmínky. Dosaďme y'' a y do levé strany diferenciální rovnice.

$$y'' + 25y = -25\cos 5x + 25\sin 5x + 25(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

Levá strana diferenciální rovnice se rovná nule pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Ověřili jsme, že funkce $y(x) = \cos 5x - \sin 5x$ je řešením dané HLDR. $\heartsuit$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

3.14. Nalezněme řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 5y' = 0$, které vyhovuje okrajovým podmínkám $y(0) = 3,\ y(2) = 3$. Proveďme zkoušku.

Řešení: Nejprve nalezneme obecné řešení. Pak ze všech řešení vybereme to, které vyhovuje okrajovým podmínkám. Charakteristická rovnice $2\lambda^2 + 5\lambda = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$. Obecné řešení dané HLDR tedy je

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 (v případě okrajových podmínek taková dvojice může a nemusí existovat) tak, aby řešení splňovalo okrajové podmínky $y(0) = 3,\ y(2) = 3$. Dosaďme je do $y(x)$:

$$\begin{aligned} 3 = y(0) &= C_1 + C_2\,\mathrm{e}^0 \\ 3 = y(2) &= C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} C_1 + \phantom{\mathrm{e}^{-5}}\, C_2 &= 3 \\ C_1 + \mathrm{e}^{-5}\, C_2 &= 3 \end{aligned}$$

Tato nehomogenní soustava dvou lineárních algebraických rovnic má právě jedno řešení $C_1 = 3$, $C_2 = 0$. Hledaným řešením je konstantní funkce $y(x) = 3\,,\ x \in \mathbb{R}$.

Zkouška: Zřejmě funkce $y(x) = 3$ splňuje okrajové podmínky. Derivace partikulárního řešení jsou: $y'(x) = 0$ a $y''(x) = 0$. Dosaďme y'' a y' do levé strany diferenciální rovnice.

$$2y'' + 5y' = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

Levá strana rovnice se rovná nule pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce $y(x) = 3$ je řešením dané okrajové úlohy. ♡

♢ V následujících příkladech nalezněte partikulární řešení daných diferenciálních rovnic, které vyhovuje zadaným počátečním, resp. okrajovým podmínkám.

3.15. **a)** $y'' - y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

b) $y'' + 4y = 0,$ $\quad y(\frac{\pi}{4}) = 4,\ y'(\frac{\pi}{4}) = -4.$

c) $y'' - 5y' + 4y = 0,$ $\quad y(0) = y'(0) = 1.$

d) $y'' + 2y' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

e) $y'' - 10y' + 25y = 0,$ $\quad y(1) = \mathrm{e}^5,\ y'(1) = 4\mathrm{e}^5.$

f) $y'' - 2y' - 3y = 0,$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 11.$

g) $y'' + 5y' + 6y = 0,$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -6.$

h) $y'' + 4y' + 29y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 15.$

i) $y'' - 4y' + 3y = 0,$ $\quad y(\ln 2) = 4,\ y'(\ln 2) = 20.$

j) $3y'' + 5y' = 0,$ $\quad y(3) = 9,\ y'(3) = 0.$

3.16. **a)** $y'' - 2y' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 2,\ y(\pi) = 2.$

b) $y'' + 4y' + 5y = 0,$ $\quad y(0) = \mathrm{e}^{4\pi},\ y(2\pi) = 1.$

c) $y'' - 4y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y(\ln 3) = 80.$

d) $4y'' + 9y = 0,$ $\quad y(-\pi) = 2,\ y(\pi) = -2.$

e) $y'' - 6y' + 10y = 0,$ $\quad y(\pi) = 9,\ y(3\pi) = 3.$

f) $y'' + 6y' + 9y = 0,$ $\quad y(0) = 27,\ y(1) = \mathrm{e}^{-3}.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

• **3.17.** **a)** $y''' - 4y'' + 4y' = 0,$ $\qquad y(0) = 7,\ y'(0) = y''(0) = 0.$

b) $y''' - 13y' + 12y = 0,$ $\qquad y(0) = 5,\ y'(0) = -4,\ y''(0) = 4.$

c) $y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0,$ $\qquad y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = y^{(4)}(1) = 0.$

d) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0,$ $\qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 32.$

3.4 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a se speciální pravou stranou

V tomto odstavci na rovnici 2. řádu

$$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = \underbrace{\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)}_{\text{speciální pravá strana}},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy proměnné x, ukážeme, jak se hledá řešení NLDR s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Všechna řešení dostaneme tak, že k jednomu jejímu řešení $y_P(x)$, tzv. **partikulárnímu** řešení, přičteme **obecné** řešení $y_H(x)$ **přiřazené HLDR** ($k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$), tedy obecné řešení je ve tvaru součtu

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)\,.$$

Definiční obor $y(x)$ je vždy $\mathbb{R}$. Obecné řešení přiřazené HLDR spočteme pomocí charakteristické rovnice, viz příklad 3.8. Partikulární řešení získáme užitím metody odhadu, tj. řešení hledáme ve tvaru

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx)\,,$$

kde čísla a, b jsou dána pravou stranou; R, S jsou obecné polynomy, jejichž stupeň je roven většímu ze stupňů polynomů P, Q a číslo k nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2\}$. Není-li číslo $\alpha = a + b\,i$ kořenem charakteristické rovnice $k_0\,\lambda^2 + k_1\,\lambda + k_2 = 0$, pak $k = 0$. Je-li číslo α kořenem charakteristické rovnice, pak k odpovídá násobnosti kořene α.

Metodu odhadu lze použít i pro NLDR s konstantními koeficienty vyšších řádů, resp. prvního řádu.

3.18. Nalezněme obecné řešení lineárních diferenciálních rovnic:

a) $y'' - 6y' + 9y = 36\,\sin 3x,$ $\qquad$ **b)** $y'' + 9y = 6\,\cos 3x - 18\,\sin 3x.$

Řešení:

a) Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ přiřazené HLDR $y'' - 6y' + 9y = 0$ má kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Obecné řešení přiřazené HLDR je

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{3x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ukažme, že pravá strana rovnice $f(x) = 36\,\sin 3x$ je speciální pravá strana. Dosadíme-li $a = 0$, $b = 3$, $P(x) = 0$ a $Q(x) = 36$ do formule pro speciální pravou stranu, dostaneme $\mathrm{e}^{0x}(0 \cdot \cos 3x + 36\,\sin 3x) = 36\,\sin 3x$. Tedy umíme udělat odhad partikulárního (= nějakého, jednoho) řešení zadané NLDR, tj.

$$y_P(x) = x^k \mathrm{e}^{0x}(R(x)\cos 3x + S(x)\sin 3x).$$

Protože polynomy P, Q jsou konstanty, tedy $R(x) = A \in \mathbb{R}$, $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = 0 + 3\,i = 3\,i \neq 3$ (není kořenem charakteristické rovnice), proto $k = 0$. Po dosazení dostaneme

$$y_P(x) = x^0 \mathrm{e}^{0x}(A\cos 3x + B\sin 3x) = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Konstanty A, B určíme tak, aby $y_P(x)$ bylo řešením zadané NLDR. Spočtěme 1. a 2. derivaci y_P: $y_P'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$ a $y_P''(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$. Dosaďme za y'', y' a y do zadané rovnice:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 6(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 9(A\cos 3x + B\sin 3x) = 36\ \sin 3x.$$

Po úpravě

$$(-9A - 18B + 9A)\cos 3x + (-9B + 18A + 9B)\sin 3x = 36\ \sin 3x,$$

$$-18B\cos 3x + 18A\sin 3x = 0 \cdot \cos 3x + 36\ \sin 3x.$$

Aby byla poslední rovnost splněna, musí se koeficienty u funkcí $\sin 3x$, $\cos 3x$ na levé a pravá straně rovnosti sobě rovnat:

$$\begin{aligned} -18B &= 0 \\ 18A &= 36\,. \end{aligned}$$

Odtud $A = 2$, $B = 0$. Partikulární řešení zadané NLDR je $y_P(x) = 2\ \cos 3x$. Hledané obecné řešení je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{3x} + 2\ \cos 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Řešíme rovnici $y'' + 9y = 6\ \cos 3x - 18\ \sin 3x$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 9 = 0$ přiřazené HLDR $y'' + 9y = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 3\,i$. Obecné řešení přiřazené HLDR je

$$y_H(x) = C_1\ \cos 3x + C_2\ \sin 3x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pro speciální pravou stranu $f(x) = 6\ \cos 3x - 18\ \sin 3x$ je $a = 0$, $b = 3$, $P(x) = 6$ a $Q(x) = -18$. Rozmysleme odhad partikulárního řešení. Stejně jako u předchozí rovnice jsou polynomy P a Q konstaty, tedy $R(x) = A \in \mathbb{R}$, $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = 0 + 3\,i = 3\,i = \lambda_1$ (je kořenem charakteristické rovnice). Jeho násobnost je jedna, proto $k = 1$. Partikulární řešení je tvaru

$$y_P(x) = x^1 \mathrm{e}^{0x}(A\cos 3x + B\sin 3x) = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Konstanty A, B určíme tak, aby $y_P(x)$ bylo řešením zadané NLDR. Spočtěme druhou derivaci y_P: $y_P''(x) = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$. Dosaďme za y'' a y do zadané rovnice. Levá strana rovnice bude obsahovat mnoho sčítanců. Z důvodu přehlednosti pišme výrazy, které dosazujeme, následujícím způsobem: Na levé straně rovnice se budou vyskytovat násobky funkcí $x\cos 3x$, $x\sin 3x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$. Napišme funkce $x\cos 3x$, $x\sin 3x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$ pod sebe a připisujme do řádků pouze příslušné konstanty, které u funkcí stojí, jak postupně do rovnice dosazujeme y_P'' a $9y_P$. Aby byla rovnost $y_P'' + 9y_P = 6\ \cos 3x - 18\ \sin 3x$ splněna, musí se koeficienty u funkcí $\cos 3x$, $\sin 3x$ na levé a pravé straně rovnosti sobě rovnat. Vše je zapsáno v následující tabulce.

levá strana	$y'' + 9y$	$=$	$6\,\cos 3x - 18\,\sin 3x$	**pravá strana**
$x\cos 3x$:	$-9A + 9A$	$=$	0	
$x\sin 3x$:	$-9B + 9B$	$=$	0	
$\cos 3x$:	$6B$	$=$	6	$: \cos 3x$
$\sin 3x$:	$-6A$	$=$	-18	$: \sin 3x$

Řešením soustavy z tabulky je dvojice $B = 1$, $A = 3$. Partikulární řešení zadané NLDR je $y_P(x) = x(3\cos 3x + \sin 3x)$. Hledané obecné řešení je

$$\begin{aligned} y(x) = y_H(x) + y_P(x) &= C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x + x(3\cos 3x + \sin 3x) \\ &= \cos 3x(C_1 + 3x) + \sin 3x(C_2 + x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

♡

3.19. Nalezněme partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' - 6y' + 9y = (6x - 4)\mathrm{e}^{3x}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$.

Řešení: Přiřazená HLDR $y'' - 6y' + 9y = 0$ je stejná jako v příkladě 3.18. **a)**, tedy její obecné řešení je

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{3x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pro speciální pravou stranu $f(x) = (6x - 4)\mathrm{e}^{3x}$ je $a = 3$, $b = 0$ a $P(x) = 6x - 4$. Na $Q(x)$ pravá strana nezáleží, neboť $\mathrm{e}^{3x}((6x - 4)\cos 0x + Q(x)\,\sin 0x) = \mathrm{e}^{3x}(6x - 4)$. Volme $Q(x) = 0$. Polynom P je stupně jedna, polynom Q je stupně nižšího. Tedy $R(x) = Ax + B$, $S(x) = Cx + D$. Číslo $\alpha = 3 + 0\,i = 3 = \lambda_{1,2}$ (je kořenem charakteristické rovnice). Jeho násobnost je dvě, proto $k = 2$. Partikulární řešení je tvaru

$$y_P(x) = x^2\mathrm{e}^{3x}((Ax + B)\cos 0x + (Cx + D)\sin 0x) = \mathrm{e}^{3x}(Ax^3 + Bx^2).$$

Konstanty A, B určíme pomocí stejného postupu jako v předchozím příkladě. Spočtěme první a druhou derivaci y_P : $y'_P(x) = 3\mathrm{e}^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + \mathrm{e}^{3x}(3Ax^2 + 2Bx)$ a $y''_P(x) = 9\mathrm{e}^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6\mathrm{e}^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + \mathrm{e}^{3x}(6Ax + 2B)$. Dosaďme za y'', y' a y do zadané NLDR. Na levé straně rovnice se budou vyskytovat násobky funkcí $x^3\mathrm{e}^{3x}$, $x^2\mathrm{e}^{3x}$, $x\mathrm{e}^{3x}$, e^{3x}. Sestavme tabulku pro jejich koeficienty, jak do rovnice dosazujeme výrazy y''_P, $-6y'_P$ a $9y_P$.

levá strana	$y'' - 6y' + 9y$	$=$	$(6x - 4)\mathrm{e}^{3x}$	**pravá strana**
$x^3\mathrm{e}^{3x}$:	$9A - 18A + 9A$	$=$	0	
$x^2\mathrm{e}^{3x}$:	$9B + 18A - 18B - 18A + 9B$	$=$	0	
$x\,\mathrm{e}^{3x}$:	$12B + 6A - 12B$	$=$	6	$: x\,\mathrm{e}^{3x}$
e^{3x} :	$2B$	$=$	-4	$: \mathrm{e}^{3x}$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Z posledních dvou řádků tabulky plyne, že $A = 1$, $B = -2$. Partikulární řešení zadané NLDR je $y_P(x) = e^{3x}(x^3 - 2x^2)$. Toto řešení zřejmě nesplňuje počáteční podmínky $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$, neboť $y_P(0) = 0$. Tedy hledané řešení musíme vybrat z obecného řešení zadané NLDR:

$$\begin{aligned} y(x) = y_H(x) + y_P(x) &= C_1 e^{3x} + C_2\, x\, e^{3x} + e^{3x}(x^3 - 2x^2) \\ &= e^{3x}(C_1 + C_2 x - 2x^2 + x^3)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Spočtěme jeho první derivaci: $y'(x) = 3e^{3x}(C_1 + C_2 x - 2x^2 + x^3) + e^{3x}(C_2 - 4x + 3x^2)$. Nyní dosadíme počáteční podmínky $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$ do $y(x)$ a $y'(x)$:

$$\begin{aligned} 3 = y(0) &= C_1 \\ 7 = y'(0) &= 3\,C_1 + C_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= 3 \\ C_2 &= -2 \end{aligned}$$

Partikulární řešení vyhovující zadaným počátečním podmínkám je

$$y(x) = e^{3x}(3 - 2x - 2x^2 + x^3)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \qquad \heartsuit$$

3.20. Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice 1. řádu $2y' + y = 58\, e^{2x} \cos x$.

Řešení: Charakteristická rovnice $2\lambda + 1 = 0$ přiřazené HLDR $2y' + y = 0$ má kořen $\lambda = -\frac{1}{2}$. Obecné řešení přiřazené HLDR je

$$y_H(x) = C\, e^{-\frac{x}{2}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Pro speciální pravou stranu $f(x) = 58\, e^{2x} \cos x$ je $a = 2$, $b = 1$, $P(x) = 58$ a $Q(x) = 0$. Rozmysleme odhad partikulárního řešení zadané NLDR. Polynomy P a Q jsou konstanty, tedy $R(x) = A \in \mathbb{R}$, $S(x) = B \in \mathbb{R}$. Číslo $\alpha = 2 + i \neq -\frac{1}{2}$ (není kořenem charakteristické rovnice), proto $k = 0$. Máme

$$y_P(x) = x^0 e^{2x}(A \cos x + B \sin x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x).$$

Spočtěme jeho první derivaci: $y_P'(x) = 2e^{x}(A \cos x + B \sin x) + e^{2x}(-A \sin x + B \cos x)$. Dosaďme výrazy $2y_P'$ a y_P do zadané NLDR. Pro koeficienty u funkcí $e^{2x} \cos x$, $e^{2x} \sin x$ dostaneme následující tabulku.

levá strana	$2y' + y$	$=$	$58\, e^{2x} \cos x$	**pravá strana**
$e^{2x} \cos x$:	$4A + 2B + A$	$=$	58	: $e^{2x} \cos x$
$e^{2x} \sin x$:	$4B - 2A + B$	$=$	0	: $e^{2x} \sin x$

Hledejme uspořádanou dvojici (A, B), která řeší soustavu z tabulky:

$$\begin{aligned} 5A + 2B &= 58 \\ -2A + 5B &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 10A + 4B &= 116 \\ -10A + 25B &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 5A + 2B &= 58 \\ 29B &= 116 \end{aligned}$$

Odtud $B = 4$, $5A + 8 = 58 \implies A = 10$. Partikulární řešení zadané NLDR je $y_P(x) = e^{2x}(10 \cos x + 4 \sin x)$. Hledané obecné řešení je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C\, e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}(10 \cos x + 4 \sin x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \qquad \heartsuit$$

Poznámka: V MI jsme řešení všech NLDR 1. řádu hledali pomocí metody separace proměnných a metody variace konstanty.

◇ V následujících příkladech nalezněte obecné řešení daných lineárních diferenciálních rovnic.

3.21. **a)** $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-x}$. **b)** $y'' - 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.
c) $y'' - 4y = 8x^3$. **d)** $y'' + 3y' = 9x$.
e) $y'' - y' - 2y = 5\sin 2x$. **f)** $y'' + 4y = \cos 2x$.
g) $y'' - 8y' + 16y = 8\mathrm{e}^{4x}$. **h)** $y'' + 4y' - 5y = 1$.
i) $y'' - 7y' + 10y = \mathrm{e}^{2x}(6x + 7)$. **j)** $y'' - y = x^2 - x + 1$.
k) $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$. **l)** $y'' + 2y' - 3y = x^2\mathrm{e}^x$.
m) $y'' + 5y' = 10$. **n)** $y'' + y = 4\mathrm{e}^x$.
o) $y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x$. **p)** $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.
q) $y'' + 2y' + y = x + 1$. **r)** $y'' + 4y' + 4y = 6\mathrm{e}^{-2x}$.
s) $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$. **t)** $y'' - y' - 1 = 0$.

3.22. **a)** $y'' - 8y' + 15y = 32x\mathrm{e}^x$. **b)** $y'' + 2y' = x + 1$.
c) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$. **d)** $5y'' - 6y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}$.
e) $y'' + 6y' + 5y = \mathrm{e}^x(8\sin x - 11\cos x)$. **f)** $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x$.
g) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}(x^2 + x - 2)$. **h)** $9y'' - 6y' + y = \sin \frac{x}{3}$.
i) $y'' - 4y' - 5y = \mathrm{e}^{2x}(6x + 3)$. **j)** $y'' - 3y = 10\cos x$.
k) $y' + 2y = 4x + 8$. **l)** $y' - y = x^2$.
m) $y' - 3y = \mathrm{e}^{-3x}$. **n)** $y' + y = \cos x$.
o) $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}\sin x$. **p)** $y' - 4y = \mathrm{e}^{4x}(6x^2 + 7)$.

• **3.23.** **a)** $y''' - y'' = -3x + 1$. **b)** $y''' + y'' = 7\mathrm{e}^{-x}$.
c) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = \cos x$. **d)** $y^{(5)} + y''' = x^2 - 1$.
e) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. **f)** $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 4\mathrm{e}^{-2x}$.
g) $y''' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$. **h)** $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

◊ Nalezněte partikulární řešení daných lineárních diferenciálních rovnic, které vyhovuje zadaným okrajovým, resp. počátečním podmínkám.

3.24. **a)** $4y'' + y = 4\cos\frac{x}{2}$, $\quad y(0) = y(\pi) = 0.$

b) $y'' + 9y = -5\sin 2x$, $\quad y(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ y'(\frac{\pi}{6}) = 2.$

c) $y'' - y' = 2(1-x)$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

d) $y'' - 2y' = \mathrm{e}^x(x^2 + x - 3)$, $\quad y(0) = y'(0) = 2.$

e) $y'' + y = 10$, $\quad y(0) = y(\pi) = 0.$

f) $y'' + y = 2x - \pi$ $\quad y(0) = y(\pi) = 0.$

g) $y'' = 30x^4$, $\quad y(0) = 2,\ y(1) = 4.$

h) $y'' - y = 6 - x^2$, $\quad y(0) = 4,\ y'(0) = 2.$

Modifikace metody odhadu

3.25. Nalezněme obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2x^2$.

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ přiřazené HLDR $y'' - 3y' + 2y = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Obecné řešení přiřazené HLDR je

$$y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana zadané NLDR $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + 2x^2$ je součet exponenciály a polynomu. Tedy partikulární řešení zadané NLDR je tvaru

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)\,,$$

kde $y_{P1}(x)$ je partikulární řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^{2x}$ a $y_{P2}(x)$ je partikulární řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$. Řešení y_{P1}, y_{P2} umíme nalézt metodou odhadu. Pomocí tabulky ukažme, že pravé strany $f_1(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ a $f_2(x) = 2x^2$ jsou speciální pravé strany:

i	$f_i(x)$	a	b	$P(x)$	$Q(x)$	$\mathrm{e}^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$
1	$3\mathrm{e}^{2x}$	2	0	3	0	$\mathrm{e}^{2x}(3\cos 0x + 0\sin 0x) = 3\mathrm{e}^{2x}$
2	$2x^2$	0	0	$2x^2$	0	$\mathrm{e}^{0x}(2x^2\cos 0x + 0\sin 0x) = 2x^2$

Odtud plyne odhad partikulárních řešení y_{Pi}, $i = 1, 2$:

i	a	b	$R(x)$	$S(x)$	α	k	$y_{Pi}(x)$
1	2	0	A	B	2	1	$x^1\mathrm{e}^{2x}(A\cos 0x + B\sin 0x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$
2	0	0	$Cx^2 + Dx + E$	$Fx^2 + Gx + H$	0	0	$x^0\mathrm{e}^0[(Cx^2 + Dx + E)\cos 0 + (Fx^2 + Gx + H)\sin 0] = Cx^2 + Dx + E$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Určeme konstanty A, C, D, E z tabulky. Funkce $y_{P1}(x) = Axe^{2x}$ musí splňovat rovnost $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$. Spočtěme y'_{P1}, y''_{P1} : $y'_{P1}(x) = (A + 2Ax)e^{2x}$ a $y''_{P1}(x) = (4A + 4Ax)e^{2x}$. Dosaďme za y'', y' a y do rovnice:

$$(4A + 4Ax)e^{2x} - 3(A + 2Ax)e^{2x} + 2Axe^{2x} = 3e^{2x}.$$

Odtud $A = 3$. První sčítanec partikulárního řešení zadané NLDR je

$$y_{P1}(x) = 3xe^{2x}.$$

Funkce $y_{P2}(x) = Cx^2 + Dx + E$ musí splňovat rovnost $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$. Spočtěme y'_{P2}, y''_{P2} : $y'_{P2}(x) = 2Cx + D$ a $y''_{P2}(x) = 2C$. Dosaďme za y'', y' a y do rovnice:

$$2C - 3(2Cx + D) + 2(Cx^2 + Dx + E) = 2x^2.$$

Po úpravě

$$2Cx^2 + (2D - 6C)x + 2C - 3D + 2E = 2x^2,$$

odtud dostáváme

$$\begin{aligned} 2C &= 2 \\ 2D - 6C &= 0 \\ 2C - 3D + 2E &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} C &= 1 \\ D &= 3 \\ E &= \tfrac{7}{2} \end{aligned}.$$

Druhý sčítanec partikulárního řešení je

$$y_{P2}(x) = x^2 + 3x + \frac{7}{2}.$$

Tedy partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x) = 3xe^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

a hledané obecné řešení je

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$ ♡

◇ Nalezněte obecné řešení následujících lineárních diferenciálních rovnic.

3.26. **a)** $4y'' + y = x + 5e^x$. **b)** $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$.

c) $y'' + y' = 3 + xe^x$. **d)** $y'' + 9y = \cos 3x + 9$.

e) $5y'' + 5y = 8\cos\frac{x}{3} - 2e^{-x}$. **f)** $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.

g) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$. **h)** $y'' + 3y' + 2y = 4x - 9\sin x + 3\cos x$.

i) $y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$. **j)** $y'' - 2y' + y = \sin x + e^x + e^{-x}$.

k) $2y' + y = 2x + 5\sin x$. **l)** $y' + y = x^2 + 7e^{-x}$.

m) $y' - 2y = e^{2x} + 13\cos 3x$. **n)** $3y' - y = 3 + 5e^{2x}$.

o) $y' + 2y = 4\sin 2x + 10\cos x$. **p)** $y' - 3y = 50x\sin x + 6$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

3.5 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice a metoda variace konstant

Obecné řešení NLDR 2. řádu

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x), \quad a_0(x) \neq 0 \ \text{ pro všechna } x \in I,$$

je ve tvaru součtu

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x),$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené homogenní rovnice $a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$, tj.

$$y_H(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x);$$

funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR. Partikulární řešení NLDR $y_P(x)$ hledáme ve tvaru

$$y_P(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x),$$

tedy v $y_H(x)$ jsme konstanty C_1, C_2 nahradili funkcemi $c_1(x)$, $c_2(x)$. Pro derivace neznámých funkcí $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ je třeba si pamatovat soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} c_1'(x)\,y_1(x) + c_2'(x)\,y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)\,y_1'(x) + c_2'(x)\,y_2'(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{aligned}, \ \text{neboli} \quad \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je matice z Wronského determinantu fundamentálního systému řešení y_1, y_2. Například pomocí Cramerova pravidla soustavu vyřešíme a integrací nalezeného řešení $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ obdržíme funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$.

Definiční obor $y(x)$, obecného řešení NLDR, je interval I, na kterém jsou koeficienty $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, a pravá strana $f(x)$ definované a spojité a $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$.

3.27. Nalezněme řešení lineární diferenciální rovnice $2y'' + 2y = \cos^{-1} x$, které vyhovuje okrajovým podmínkám $y(0) = \frac{1}{4}\ln 2$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}$.

Řešení: Řešení, které splňuje dané podmínky, vybíráme z množiny všech řešení (tzv. obecné řešení) zadané NLDR. Definičním oborem řešení je interval, na kterém je pravá strana rovnice $f(x) = \cos^{-1} x$ definovaná a spojitá, tj. $\cos x \neq 0$. To nastane právě na intervalech $I_i = \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $i \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k daným okrajovým podmínkám volíme ten, do kterého náleží prvky 0 a $\frac{\pi}{4}$, tedy $I_0 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Přiřazená HLDR $2y'' + 2y = 0$ je rovnice s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $2\lambda^2 + 2 = 0$ má dva kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i$. Tedy fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ a obecné řešení přiřazené HLDR je

$$y_H(x) = C_1\,\cos x + C_2\,\sin x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pravá strana $f(x) = \cos^{-1} x$ není speciální pravá strana, nelze použít metodu odhadu. Podle metody variace konstant hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_P(x) = c_1(x)\,\cos x + c_2(x)\,\sin x\,.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Pomocí fundamentálního systému $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$ napíšeme soustavu algebraických rovnic pro $c_1'(x),\ c_2'(x)$:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2\cos x} \end{bmatrix}.$$

Řešení soustavy nalezneme užitím Cramerova pravidla. Determinant matice soustavy, označme ho $W(x)$, je Wronskián funkcí $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$. Spočtěme determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$D_1(x) = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{1}{2\cos x} \end{matrix}} & \begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix} \end{vmatrix} = \frac{-\sin x}{2\cos x}, \qquad D_2(x) = \begin{vmatrix} \begin{matrix} \cos x \\ -\sin x \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{1}{2\cos x} \end{matrix}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Pak $c_1'(x) = \dfrac{D_1(x)}{W(x)} = \dfrac{-\sin x}{2\cos x}$, $c_2'(x) = \dfrac{D_2(x)}{W(x)} = \dfrac{1}{2}$. Integrací získáme funkce $c_1(x),\ c_2(x)$:

$$c_1(x) = \int \frac{-\sin x}{2\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\cos x|\,, \qquad c_2(x) = \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\,.$$

Integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme **jedno** řešení $y_P(x)$, tedy **jednu** funkci $c_1(x)$ a **jednu** funkci $c_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_P(x) = c_1(x)\,\cos x + c_2(x)\,\sin x = \frac{\cos x}{2}\,\ln|\cos x| + \frac{x}{2}\,\sin x.$$

Obecné řešení zadané NLDR je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\cos x + C_2 \sin x + \frac{\cos x}{2}\,\ln|\cos x| + \frac{x}{2}\,\sin x \\ &= \left(C_1 + \ln\sqrt{|\cos x|}\right)\cos x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\sin x\,, \quad x \in I_i\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Nyní určíme konstanty $C_1,\ C_2$ tak, aby řešení splňovalo okrajové podmínky $y(0) = \frac{1}{4}\ln 2$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}$. Dosaďme je do $y(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\ln 2 = y(0) &= C_1 + \ln 1, \\ \frac{\sqrt{2}\,\pi}{16} = y(\tfrac{\pi}{4}) &= \Bigg(C_1 + \frac{1}{2}\,\underbrace{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\ln 2}\Bigg)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(C_2 + \frac{\pi}{8}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{4}\ln 2, \\ 0 &= \left(\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\,\ln 2\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,C_2. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je $C_1 = \frac{1}{4}\ln 2,\ C_2 = 0$. Daným okrajovým podmínkám vyhovuje funkce

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(\tfrac{1}{4}\ln 2 + \ln\sqrt{|\cos x|}\right)\cos x + \tfrac{x}{2}\,\sin x \\
&= \cos x\,\ln\sqrt{\sqrt{2}\,\cos x} + \tfrac{x}{2}\,\sin x\,, \quad x \in I_0 = (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\,.
\end{aligned}
$$
♡

3.28. Nalezněme řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}}$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = y'(0) = 2$.

Řešení: Nejdříve musíme nalézt obecné řešení dané rovnice. Definičním oborem řešení je interval, na kterém je pravá strana rovnice $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}}$ definovaná a spojitá. V našem případě tedy $I = (-2, 2)$.
Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ přiřazené HLDR $y'' - 2y' + y = 0$ má kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Tedy fundamentální systém řešení tvoří funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^x$ a obecné řešení přiřazené HLDR je

$$y_{_H}(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Partikulární řešení zadané NLDR hledáme ve tvaru

$$y_{_P}(x) = c_1(x)\,\mathrm{e}^x + c_2(x)\,x\,\mathrm{e}^x\,.$$

Poznamenejme, že funkce $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}}$ není speciální pravá strana, metodu odhadu nelze použít. Derivace $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ hledaných funkcí řeší soustavu

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (1+x)\mathrm{e}^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}} \end{bmatrix}.$$

Od druhé rovnice odečteme první:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}} \end{bmatrix}.$$

Odtud $c_2'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ a $c_1'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Integrací získáme funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= \int \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} 4 - x^2 &=& t \\ -2x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x &=& \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{t} = \sqrt{4-x^2}, \\
c_2(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\tfrac{x}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Opět připomeňme, že integrační konstanty nepíšeme, neboť hledáme **jedno** řešení $y_{_P}(x)$, tedy **jednu** funkci $c_1(x)$ a **jednu** funkci $c_2(x)$. Partikulární řešení zadané NLDR je

$$y_{_P}(x) = c_1(x)\,\mathrm{e}^x + c_2(x)\,x\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sqrt{4-x^2} + x\,\mathrm{e}^x\arcsin\tfrac{x}{2}.$$

Obecné řešení zadané NLDR je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\sqrt{4-x^2} + x\,\mathrm{e}^x \arcsin\tfrac{x}{2} \\ &= \mathrm{e}^x\left(C_1 + C_2\,x + \sqrt{4-x^2} + x\,\arcsin\tfrac{x}{2}\right), \quad x \in (-2,2)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Nyní určíme konstanty C_1, C_2 tak, aby řešení splňovalo podmínky $y(0) = y'(0) = 2$. Spočteme derivaci obecného řešení.

$$y'(x) = \mathrm{e}^x\left(C_1 + C_2\,x + \sqrt{4-x^2} + x\,\arcsin\tfrac{x}{2} + C_2 + \tfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \arcsin\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\right)$$

Dosaďme počáteční podmínky do $y(x)$, $y'(x)$:

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= C_1 + 2 \\ 2 = y'(0) &= C_1 + 2 + C_2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Zadané podmínky právě splňuje nalezené partikulární řešení $y_P(x)$. ♡

◇ V následujících příkladech nalezněte obecné řešení daných lineárních diferenciálních rovnic.

3.29. **a)** $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{3x}}{x^3}$. **b)** $\dfrac{1}{4}\,y'' + y' + y = \mathrm{e}^{-2x}\ln x$.

c) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos x}$. **d)** $y'' + 9y = \dfrac{54}{\cos^3 3x}$.

e) $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{1+x^2}$. **f)** $y'' + 4y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

g) $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\cos\mathrm{e}^x$. **h)** $4y'' + y = \dfrac{1}{\cos\frac{x}{2}}$.

i) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}$. **j)** $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{3x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

k) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}\ln(x+1)$. **l)** $y'' + 10y' + 25y = \dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{x^2+2x}$.

m) $4y'' + 8y' + 4y = \dfrac{15\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x}$. **n)** $y'' + 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3+x}$.

• **3.30.** **a)** $y'' - 2y' = \dfrac{1+2x}{x^2}$. **b)** $9y'' - y = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - 1}$.

c) $y'' + y = -\mathrm{cotg}^2 x$. **d)** $y'' - y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

e) $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}\,\mathrm{e}^x$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ Nalezněte partikulární řešení daných lineárních diferenciálních rovnic, které vyhovuje zadaným okrajovým, resp. počátečním podmínkám.

3.31. **a)** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$, $\quad y(0) = \ln\sqrt{2},\ y(1) = \frac{\pi}{4}\,e$.

b) $y'' - 12y' + 36y = x^{-1}e^{6x}$, $\quad y(1) = e^6,\ y'(1) = 0$.

c) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$, $\quad y(-\frac{\pi}{4}) = 2,\ y'(-\frac{\pi}{4}) = 4 + \pi$.

d) $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$, $\quad y(1) = e^5,\ y'(1) = 9\,e^5$.

e) $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$, $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

3.6 Metoda snížení řádu

Neumíme-li rovnici druhého a vyššího řádu vyřešit a v rovnici jsou pouze členy obsahující y', y'', …, tj. proměnná y se v rovnici nevyskytuje, můžeme snížit řád rovnice pomocí substituce $y'(x) = z(x)$, pak $y''(x) = z'(x)$, …. Ukažme tento postup na následujícím příkladě. V tomto odstavci se předpokládá znalost řešení diferenciálních rovnic 1. řádu, viz skripta [MI].

3.32. Nalezněme řešení lineární diferenciální rovnice, které vyhovuje okrajovým podmínkám, resp. obecné řešení, nejsou-li podmínky zadány.

a) $y'' + \dfrac{1}{x}\,y' = 0, \quad y(1) = 0,\ y(e) = 1.$ $\qquad$ **b)** $xy'' - y' = 4x^3e^{-x^2}, \quad x \in (0,\infty)$.

Řešení: Rovnice jsou lineární, ale nemají konstantní koeficienty, proto obecně neumíme najít fundamentální systém řešení (přiřazené) HLDR. Rovnice neobsahují člen s y. V tomto případě můžeme použít substituci $y'(x) = z(x)$ a odtud $y''(x) = z'(x)$ a tím snížit řád diferenciální rovnice.

a) Definiční obor řešení je interval, na němž je funkce $a_1(x) = \frac{1}{x}$ definovaná a spojitá a prvky $x = 1$ a $x = e$ do něj náleží, tedy $I = (0,\infty)$. Po substituci $y'(x) = z(x)$ má rovnice $y'' + \frac{1}{x}\,y' = 0$ tvar

$$z' + \frac{1}{x}\,z = 0\,.$$

Nyní hledáme obecné řešení diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci z. Užitím metody separace proměnných získáme (vypočtěte sami)

$$z(x) = C_1\,\frac{1}{x}, \quad C_1 \in \mathbb{R}\,,$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

tedy

$$y'(x) = C_1\,\frac{1}{x} \quad\Longrightarrow\quad y(x) = \int C_1\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = C_1\,\ln|x| + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Nesmíme zapomenout na integrační konstantu C_2, protože hledáme všechna řešení dané diferenciální rovnice. Dosaďme okrajové podmínky $y(1) = 0$, $y(\mathrm{e}) = 1$ do $y(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = C_1\,\ln 1 + C_2 \\ 1 &= y(\mathrm{e}) = C_1\,\ln \mathrm{e} + C_2 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= 1 \end{aligned}$$

Daným okrajovým podmínkám vyhovuje funkce

$$y(x) = \ln|x| = \ln x\,,\ x \in (0, \infty)\,.$$

b) Po substituci $y'(x) = z(x)$ má rovnice $xy'' - y' = 4x^3\mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in (0, \infty)$ tvar

$$xz' - z = 4x^3\mathrm{e}^{-x^2}, \text{ tj.} \qquad z' - \frac{1}{x}\,z = 4x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Obecné řešení této NLDR 1. řádu pro neznámou funkci z (vypočtěte sami) je

$$z(x) = C_1\,x - 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,, \quad C_1 \in \mathbb{R}\,, \text{ tj.} \qquad y'(x) = C_1\,x - 2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Odtud

$$y(x) = \int \left(C_1\,x - 2x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\,\mathrm{d}x = C_1\,\frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x^2} + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je

$$y(x) = K_1 + K_2\,x^2 + \mathrm{e}^{-x^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

Konstantu $\frac{C_1}{2}$ jsme označili K_2 a konstanta $C_2 = K_1$. ♡

◇ V následujících příkladech nalezněte obecné řešení daných lineárních diferenciálních rovnic.

3.33. **a)** $(x\ln x)\,y'' - y' = 0$, $x \in (1, \infty)$.

b) $y'' - \dfrac{1}{x}\,y' = x\mathrm{e}^x$.

c) $y' - xy'' = xy'$, $x \in (0, \infty)$.

d) $y'' = \dfrac{2y'}{x-1}$.

e) $y'' + \dfrac{1}{x}\,y' = 4$.

f) $y'' - \dfrac{3}{x}\,y' = \dfrac{x}{2}$.

g) $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}\,y' = 4\,(1+x^2)$.

h) $y'' - \dfrac{2}{x}\,y' = 10x^3$.

i) $y'' + \dfrac{1}{x}\,y' = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

j) $y'' + \dfrac{x}{1+x}\,y' = 0$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

• **3.34.** Nalezněme řešení diferenciální rovnice

$$y'' = \frac{1 + (y')^2}{2xy'}\,,$$

které vyhovuje počátečním podmínkám $y(1) = 4,\ y'(1) = -1$.

Řešení: Nelineární diferenciální rovnice neobsahuje člen s y, proto můžeme použít substituci $y'(x) = z(x)$, a tedy $y''(x) = z'(x)$. Využijme navíc počáteční podmínku $y'(1) = -1$, tj. $z(1) = -1$. Dostaneme počáteční úlohu

$$z' = \frac{1 + z^2}{2xz}, \quad z(1) = -1\,.$$

Její řešení (vypočtěte sami pomocí metody separace proměnných) je

$$z(x) = -\sqrt{2x-1}\,, \quad x \in (\tfrac{1}{2}, \infty).$$

Odtud

$$y'(x) = -\sqrt{2x-1}\,, \quad x \in (\tfrac{1}{2}, \infty)\,.$$

Integrací získáme řešení dané diferenciální rovnice,

$$y(x) = -\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hodnotu integrační konstanty C určíme z druhé počáteční podmínky $y(1) = 4$.

$$4 = y(1) = -\frac{1}{3} + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{13}{3}$$

Řešení zadané počáteční úlohy je

$$y(x) = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}\,, \quad x \in (\tfrac{1}{2}, \infty)\,.$$ ♡

◇ Nalezněte partikulární řešení daných diferenciálních rovnic, které vyhovuje zadaným počátečním podmínkám.

3.35. **a)** $y'' + \dfrac{(y')^2}{x^2} = 0, \qquad y(-2) = 4\ln 4,\ y'(-2) = 1.$

b) $y'' + 2y'\operatorname{tg} x = 4, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

c) $y'' = 4 + 4y' + (y')^2, \qquad y(\tfrac{1}{2}) = \ln 2,\ y'(\tfrac{1}{2}) = 0.$

d) $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}, \qquad y(\pi) = 3,\ y'(\pi) = 1.$

e) $y'' - \dfrac{1}{x}\, y' = 8x^2, \qquad y(1) = 3,\ y'(1) = 2.$

f) $y'' - y' \operatorname{tg} x = 2 \sin x, \qquad y(\pi) = \pi,\ y'(\pi) = 1.$

g) $y'' + 2y' \operatorname{cotg} x = 4 \operatorname{cotg} x, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = \pi,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

h) $y''(2 - \mathrm{e}^x) = 3\mathrm{e}^x \cos^2 y', \qquad y(0) = 7,\ y'(0) = \frac{3}{2}\,\pi.$

i) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

j) $y'' = \dfrac{y' - 1}{x}, \qquad y(1) = 5,\ y'(1) = -1.$

♢ Nalezněte obecné řešení lineárních diferenciálních rovnic, resp. partikulární řešení vyhovující počátečním podmínkám, jsou-li uvedeny.

• **3.36.** **a)** $y''' - y'' = \dfrac{2 + x}{x^3}.$ **b)** $y''' - y' = 3(2 - x^2).$

c) $y''' + 2y'' + y' = -2\mathrm{e}^{-2x}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = y''(0) = 1.$

4 Soustavy diferenciálních rovnic

4.1 Řešení soustav diferenciálních rovnic

Řešením soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$x' = f(t, x, y)\,,$$
$$y' = g(t, x, y)\,,$$

rozumíme takovou dvojici funkcí $[x(t), y(t)]$ definovaných na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pro kterou po dosazení za x, y, x' a y' do rovnic dostaneme rovnosti platné pro všechna $t \in I$. Řešení zadává parametrické rovnice rovinné křivky $[x(t), y(t)]$, $t \in I$.
Pokud některá z pravých stran soustavy závisí na t, pak se soustava nazývá **neautonomní**. V opačném případě, nazýváme soustavu **autonomní**.

U autonomních rovnic nazýváme množinu bodů $[x(t), y(t)]$, $t \in I$, která tvoří rovinnou křivku, **trajektorií** řešení. Jednobodovou trajektorii $[x_S, y_S] \in \mathbb{R}^2$ nazýváme **rovnovážným stavem** autonomní soustavy. Nalezneme jej řešením rovnic

$$f(x, y) = 0\,,$$
$$g(x, y) = 0\;.$$

Úlohu najít řešení soustavy diferenciálních rovnic spolu s počátečními podmínkami

$$PP: \left\{ \begin{array}{rcl} x(t_0) & = & x_0\,, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \quad, \text{ kde } [x_0, y_0] \text{ je zadaný bod v } \mathbb{R}^2\,,\ t_0 \in I,$$

nazýváme **počáteční úlohou**.

4.1. Ověřme, že dvojice funkcí $[x(t), y(t)] = [t, 1]$ je řešením počáteční úlohy

$$\begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & \dfrac{ty}{t-1} - \dfrac{x}{t-1}\,, \end{array} \qquad PP: \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. \quad,$$

na intervalu $I = (-\infty, 1)$. Jedná se o autonomní nebo neautonomní soustavu?

Řešení: Jedná se o neautonomní soustavu, neboť funkce $g(t, x, y) = \dfrac{ty}{t-1} - \dfrac{x}{t-1}$ závisí nejen na x a y, ale také na t. Soustava rovnic má smysl pro všechna $t \neq 1$.
Zadané $t_0 = 0$ z PP leží v intervalu $I = (-\infty, 1)$ a počáteční podmínky PP jsou pro dvojici funkcí $x(t) = t$, $y(t) = 1$ zřejmě splněny.
Zbývá ověřit, že funkce $x(t) = t$, $y(t) = 1$ splňují soustavu na intervalu I.
Ověřit první rovnici je snadné:
$L = x'(t) = (t)' = 1\,,\ P = y(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad L = P$ pro $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
Ověření druhé rovnice:
$L = y'(t) = 0\,,\ P = \dfrac{t \cdot 1}{t-1} - \dfrac{t}{t-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = P$ pro $t \neq 1$.

Tedy levé a pravé strany jednotlivých rovnic jsou totožné na intervalu $I = (-\infty, 1)$.

$\heartsuit$

$\diamondsuit$ Řešte následující příklady. Nejdříve určete, zda se jedná se o autonomní nebo neautonomní soustavu.

4.2. Ověřte, že dvojice funkcí $[x(t), y(t)] = [3\sin t,\, 2\sin t - \cos t]$ je v $\mathbb{R}$ řešením soustavy:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 3y \\ y' &= x - 2y + 2\sin t\,. \end{aligned}$$

4.3. Ověřte, že dvojice funkcí $[x(t), y(t)] = [\mathrm{e}^{2t}(1+7t),\, 7\mathrm{e}^{2t}]$ je v $\mathbb{R}$ řešením soustavy:

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y\,. \end{aligned}$$

Nalezněte všechna řešení této soustavy. (Uvědomte si, že druhou rovnici lze snadno vyřešit pro y a po dosazení do první rovnice použijte pro x metodu odhadu.)

4.4. Ověřte, že dvojice funkcí $[x(t), y(t)] = [2(t + \mathrm{e}^t), 2(1 + \mathrm{e}^t)]$ je řešením počáteční úlohy:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \frac{ty}{t-1} - \frac{x}{t-1}\,, \end{aligned} \qquad PP: \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{cases},$$

na intervalu $I = (-\infty, 1)$.

4.5. Nalezněte rovnovážné stavy soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2x^2 - 3xy\,, \\ y' &= y - y^2 - 2xy\,. \end{aligned}$$

4.6. Ověřte, že dvojice funkcí $[x(t),\, y(t)] = [r\cos(t+c),\, r\sin(t+c)]$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} x' &= -y\,, \\ y' &= x\,, \end{aligned}$$

pro libovolná čísla $r, c \in \mathbb{R}$. Nalezněte rovnovážné stavy soustavy.

4.7. V příkladu 4.6. určete konstanty r a c tak, aby funkce $x(t) = r\cos(t+c)$, $y(t) = r\sin(t+c)$ splňovaly počáteční podmínky:

a) $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Omezte se pouze na $r, c \in \mathbb{R}$, pro která $r \geq 0$ a $c \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

4.2 Autonomní lineární soustavy diferenciálních rovnic

Řešení **autonomní lineární soustavy**, tj. soustavy s konstantními koeficienty,

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}\,x + a_{12}\,y\,, \\ y' &= a_{21}\,x + a_{22}\,y\,, \end{aligned} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2\,,$$

hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda\,t}\,\vec{h}$$

kde λ je vlastní číslo matice soustavy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a $\vec{h} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, $\vec{h} \neq \vec{0}$, je vlastní vektor příslušný k vlasnímu číslu λ.
Krátce, hledaná vektorová funkce $\vec{z}$ bude řešit rovnici $\vec{z}\,' = \mathbf{A}\vec{z}$.

Obecné řešení soustavy s konstantními koeficienty je tvaru

$$\vec{z}(t) = C_1\vec{z}_1(t) + C_2\vec{z}_2(t)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\ , \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

kde vektorové funkce $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$, definované na $\mathbb{R}$, jsou dvě lineárně nezávislá řešení soustavy tvořící **fundamentální systém** řešení (FS) soustavy.

V příkladech této sbírky uvedeme pouze dva typy soustav s konstantními koeficienty, takové kdy vlastní čísla matice A jsou:

I) dvě reálná čísla: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow$ FS je tvořen vektorovými funkcemi $\vec{z}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\ \vec{h}_1$, $\vec{z}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\vec{h}_2$, kde $\vec{h}_i$ jsou příslušné vlastní vektory k vlastním číslům λ_i, $i = 1,2$.

II) dvě imaginární (komlexně sdružená) čísla: $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0 \quad \Rightarrow$
K jednomu imaginárnímu vlastnímu číslu, např k λ_1, stanovíme příslušný vlastní vektor $\vec{h}_1$ (tento vektor je obecně komplexní, číslu λ_2 odpovídá komlexně sdružený vlastní vektor $\vec{h}_2 = \overline{\vec{h}_1}$). Dále upravíme vektorovou funkci $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{h}_1$ tak, abychom dostali její reálnou a imaginární část, tj.

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\vec{h}_1 = Re(\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\vec{h}_1) + i\,Im(\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\vec{h}_1)\,.$$

Potom reálný FS soustavy je tvořen reálnými vektorovými funkcemi $\vec{z}_1(t) = Re(\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\vec{h}_1)$, $\vec{z}_2(t) = Im(\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\vec{h}_1)$.

4.8. Řešme počáteční úlohu

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 2y \\ y' &= -6x + 5y\,, \end{aligned} \qquad PP: \left\{ \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right. .$$

Řešení: Matice soustavy diferenciálních rovnic je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}\ , \text{tedy}\ \ (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -6 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Charakteristická rovnice pro výpočet vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

a její kořeny jsou dvě různá reálná čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Nyní vypočteme vlastní vektory k nalezeným vlastním číslům matice $\mathbf{A}$ (viz kapitola 2 těchto skript):

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ Řešíme homogenní soustavu $(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E})\vec{h}_1 = \vec{0}$, tj. soustavu

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -4\,u & + & 2\,v & = & 0 \\ -6\,u & + & 3\,v & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2u = v\,.$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, stačí zvolit pouze jedno řešení (např. zvolme $u = 1$, potom $v = 2$). Tedy vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_1 je $\boxed{\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ Řešíme homogenní soustavu $(\mathbf{A} - \;\mathbf{E})\vec{h}_2 = \vec{0}$, tj. soustavu

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -3\,u & + & 2\,v & = & 0 \\ -6\,u & + & 4\,v & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3u = 2v\,,$$

Soustava musí mít nekonečně mnoho řešení, tedy (při volbě např. $u = 2$) dostáváme řešení $\boxed{\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$, tj. vlastní vektor příslušný k vlasnímu číslu $\lambda_2 = 1$.

Protože charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny, tvoří vektorové funkce $\vec{z}_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{z}_2(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ FS řešení dané soustavy diferenciálních rovnic.
Obecné řešení soustavy má tvar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\,,\; t \in \mathbb{R}\,,\; C_1\,,\; C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

což lze také zapsat po složkách

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\,\mathrm{e}^{2t} + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{t}\,, \\ y(t) &= 2\,C_1\,\mathrm{e}^{2t} + 3\,C_2\,\mathrm{e}^{t}\,. \end{aligned}$$

Zbývá vypočítat partikulární řešení vyhovující daným počátečním podmínkám. Po dosazení x a y do PP dostáváme rovnice pro C_1 a C_2 :

$$\begin{array}{rcl} C_1 + 2\,C_2 & = & 0 \\ 2\,C_1 + 3\,C_2 & = & 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad C_1 = 2\,,\, C_2 = -1\,.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Hledané partikulární řešení počáteční úlohy tedy je

$$x(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^{t}\,,$$
$$y(t) = 4\,\mathrm{e}^{2t} - 3\,\mathrm{e}^{t}\,.$$

♡

4.9. Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 6y\,,\\ y' &= -3x + 4y\,. \end{aligned}$$

Řešení: Matice soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \ \text{a} \ (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{bmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0\,.$
Kořeny charakteristické rovnice, tj. vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, jsou dvě komlexně sdružená čísla $\lambda_1 = 1 + 3\,i\,,\ \lambda_2 = 1 - 3\,i\,.$

Nyní stačí najít vlastní vektor pouze k jednomu vlastnímu číslu, např. k $\boxed{\lambda_1 = 1 + 3\,i}$.
Příslušná homogenní soustava pro $\vec{h}_1$ má tvar, který dále upravíme

$$\left.\begin{array}{rcrcl} (-3-3\,i)\,u & + & 6\,v & = & 0 \\ -3\,u & + & (3-3\,i)\,v & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} (1+\,i)\,u & - & 2\,v & = & 0 \\ -1\,u & + & (1-\,i)\,v & = & 0 \end{array}\right. .$$

(Jde skutečně o soustavu LAR se singulární maticí!)

První rovnice dává $(1+\,i)\,u = 2\,v\,,$ tedy (při volbě $u = 2$) dostáváme $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\,i \end{bmatrix}$ a příslušné komplexní řešení je $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\vec{h}_1$. Hledejme reálnou a imaginární část tohoto řešení:

$$\mathrm{e}^{(1+3\,i)\,t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\,i \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{e}^{i\,3\,t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\,i \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{t}\,(\cos 3t + i\sin 3t) \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\,i \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 2\,\cos 3t + i\,2\sin 3t \\ \cos 3t - \sin 3t + i(\cos 3t + \sin 3t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{t} \left(\begin{bmatrix} 2\,\cos 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2\,\sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{bmatrix} \right) .$$

Fundamentální systém řešení soustavy tvoří reálná a imaginární část tohoto řešení, tj.

$$\text{FS:} \qquad \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 2\,\cos 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{bmatrix}, \quad \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 2\,\sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{bmatrix}.$$

Tedy

$$\vec{z}(t) = C_1\,\mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 2\,\cos 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 2\,\sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{bmatrix}, \qquad C_1\,,\,C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

neboli

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\,C_1\,\mathrm{e}^t\,\cos 3t + 2\,C_2\,\mathrm{e}^t \sin 3t\,, \\ y(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^t(\cos 3t - \sin 3t) + C_2\,\mathrm{e}^t\,(\cos 3t + \sin 3t) \end{array}\right. , \qquad C_1\,,\,C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

je obecné řešení dané soustavy. ♡

◇ Najděte obecné řešení daných soustav diferenciálních rovnic.

4.10. **a)** $\begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y\,, \\ y' & = & 3x + 2y\,. \end{array}$ **b)** $\begin{array}{rcl} x' & = & 3x - 13y\,, \\ y' & = & 5x + y\,. \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y\,, \\ y' & = & -2x + y\,. \end{array}$ **d)** $\begin{array}{rcl} x' & = & 2x\,, \\ y' & = & 4x - y\,. \end{array}$

e) $\begin{array}{rcl} x' & = & 3x - 2y\,, \\ y' & = & - y\,. \end{array}$ **f)** $\begin{array}{rcl} x' & = & y\,, \\ y' & = & -4x\,. \end{array}$

g) $\begin{array}{rcl} x' & = & 3x - 3y\,, \\ y' & = & x - y\,. \end{array}$ **h)** $\begin{array}{rcl} x' & = & 5x + y\,, \\ y' & = & -x + 5y\,. \end{array}$

◇ Nalezněte řešení následujících počátečních úloh.

4.11. **a)** $\begin{array}{rcl} x' & = & 5x + 2y \\ y' & = & -10x - 4y \end{array}\,, \qquad PP: \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & -2 \end{array}\right.\,.$

b) $\begin{array}{rcl} x' & = & -5x + y \\ y' & = & 4x - 2y \end{array}\,, \qquad PP: \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right.\,.$

c) $\begin{array}{rcl} x' & = & -3x - y \\ y' & = & 15x + 5y \end{array}\,, \qquad PP: \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 2 \\ y(0) & = & -10 \end{array}\right.\,.$

d) $\begin{array}{rcl} x' & = & -3x + 2y \\ y' & = & -5x + 3y \end{array}\,, \qquad PP: \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right.\,.$

4.12. Vzhledem k následujícím podmínkám řešte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -y\,, \\ y' &= x\,, \end{aligned}$$

PP :

a) $\left\{ \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \right.$ **b)** $\left\{ \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \right.$ **c)** $\left\{ \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right.$.

Řešení porovnejte s výsledky z příkladů 4.6. a 4.7.

4.13. Aniž bychom počítali řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x' &= 8x + 2y \\ y' &= 5x + 5y \end{aligned}\,, \qquad PP: \left\{ \begin{aligned} x(0) &= 3 \\ y(0) &= -11 \end{aligned} \right.,$$

napišme parametrickou rovnici tečny k trajektorii řešení v bodě $[3, -11]$.

Řešení: Předpokládejme, že $[x(t), y(t)]$, $t \in \mathbb{R}$ je trajektorie nám neznámého řešení soustavy diferenciálních rovnic. Parametrická rovnice tečny je tvaru $q:\ X = A + s\vec{q}$, $s \in \mathbb{R}$, kde $X = [x_1, x_2] \in q$, $A \in q$ a $\vec{q}$ je směrový vektor tečny. Získáme ji následovně:
Za bod A zvolíme dotykový bod tečny s trajektorií řešení soustavy, tj.

$$A = [3, -11] = [x(0), y(0)]\,.$$

Má-li být q tečna k trajektorii řešení, je vektor $\vec{q}$ dán tečným vektorem trajektorie v dotykovém bodě A :

$$\vec{q} = (x'(0), y'(0)) = (8x(0) + 2y(0), 5x(0) + 5y(0)) = (8\cdot 3 + 2\cdot(-11), 5\cdot 3 + 5\cdot(-11)) = (2, -40)\,.$$

Hledané parametrické rovnice tečny tedy jsou:

$$q\ :\ \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 3 + 2s \\ x_2 &= -11 - 40s \end{aligned} \right.\,, \text{ kde } s \in \mathbb{R}\,.$$

♡

◇ Řešte další příklady.

4.14. Nalezněte řešení počáteční úlohy z příkladu 4.13.

4.15. Aniž byste počítali řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 4y \\ y' &= 5x - 3y \end{aligned}\,, \qquad PP: \left\{ \begin{aligned} x(0) &= -2 \\ y(0) &= 5 \end{aligned} \right.,$$

napište parametrickou rovnici tečny k trajektorii řešení v bodě $[-2, 5]$. Nalezněte řešení počáteční úlohy. Určete rovinnou křivku, která je trajektorií řešení.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

4.3 Eulerova metoda pro soustavy diferenciálních rovnic

Obecnou soustavu diferenciálních rovnic většinou neumíme analyticky vyřešit. V případě zadání počáteční úlohy

$$x' = f(t,x,y), \qquad PP: \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
$$y' = g(t,x,y),$$

můžeme pomocí numerické metody získat alespoň přibližné hodnoty řešení x_i, y_i v konečném počtu tzv. uzlových bodů $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$.
Nejjednodušší metodou numerického řešení počáteční úlohy je **Eulerova metoda pro soustavy**. Tato metoda je zobecněním Eulerovy metody pro jednu diferenciální rovnici. Pro soustavu má jeden krok Eulerovy metody tvar

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_0 + (i+1)h, \\ x_{i+1} &= x_i + hf(t_i, x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + hg(t_i, x_i, y_i), \end{aligned}$$

kde $h = \dfrac{b-a}{N}$ značí krok metody, $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

4.16. Najděme přibližnou hodnotu partikulárního řešení dané soustavy diferenciálních rovnic na intervalu $\langle 0; 0,5\rangle$ vyhovujícího počátečním podmínkám v bodě $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} x' &= 3y^2(x-1), \\ y' &= 3x^2 - 2ty, \end{aligned} \qquad PP: \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Eulerovou metodou s předepsaným krokem $h = 0,1$.

Řešení: Eulerova metoda má pro zadanou soustavu konkrétní tvar

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_0 + (i+1)h, \\ x_{i+1} &= x_i + h(3\,y_i^2(x_i - 1)), \\ y_{i+1} &= y_i + h(3\,x_i^2 - 2\,t_i\,y_i), \end{aligned}$$

kde $t_0 = 0,\ x_0 = 2,\ y_0 = -1,\ h = 0,1,\ N = \frac{0,5}{h} = 5,\ i = 0, 1, \ldots, 4$.
V prvním kroce metody dostáváme

$$t_1 = 0,1: \quad \begin{aligned} h\,f(t_0, x_0, y_0) &= h\,(3\,y_0^2(x_0 - 1)) = 0,3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 + 0,3 = 2,3\,, \\ h\,g(t_0, x_0, y_0) &= h\,(3\,x_0^2 - 2\,t_0\,y_0) = 1,2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1 + 1,2 = 0,2\,. \end{aligned}$$

Celkový výpočet je uspořádán do tabulky:

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

i	t_i	x_i	y_i	$h\,f(t_i, x_i, y_i)$	$h\;g(t_i, x_i, y_i)$
0	0	2	-1	0,3	1,2
1	0,1	2,3	0,2	0,0156	1,583
2	0,2	2,3156	1,783	1,254723	1,537281
3	0,3	3,570323	3,320281	8,500777	3,624945
4	0,4	12,071100	6,945226	160,208201	43,157816
5	0,5	172,279301	50,103042		

Je-li dvojice $[x(t), y(t)]$ řešením zadané počáteční úlohy, je $x(t_i) \doteq x_i$, $y(t_i) \doteq y_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, 5$. ♡

Eulerovy metody pro soustavy lze použít i pro řešení počáteční úlohy pro diferenciální rovnici druhého řádu. Toto ukážeme v následujícím příkladě.

4.17. Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ najděme přibližně hodnoty partikulárního řešení dané diferenciální rovnice druhého řádu, která vyhovuje počátečním podmínkám

$$x'' = (1 - x^2)\,x' - x\,, \qquad PP: \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ x'(0) & = & 1 \end{array} \right. .$$

Zvolme $N = 4$ a v dělicích bodech t_i intervalu $\langle 0, 1\rangle$ spočítejme Eulerovou metodou přibližně hodnoty řešení $x(t_i)$, $i = 1, \ldots, 4$.

Řešení: Nejdříve ukážeme souvislost mezi diferenciální rovnicí 2. řádu a soustavou diferenciálních rovnic 1. řádu. Diferenciální rovnici

$$x'' = f(t, x, x')$$

lze substitucí $y = x'$ vždy přepsat na ekvivalentní soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= f(t, x, y)\,. \end{aligned}$$

Přihlédneme-li také k zadaným počátečním podmínkám, dostáváme ekvivalentní počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= (1 - x^2)\,y - x\,, \end{aligned} \qquad PP: \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & x'(0) = 1 \end{array} \right. .$$

Jestliže bude dvojice funkcí $[x(t), y(t)]$ řešením počáteční úlohy pro tuto soustavu odvozených diferenciálních rovnic, pak funkce $x(t)$ bude řešit původně zadanou počáteční úlohu pro rovnici 2. řádu. Odvozenou autonomní soustavu řešíme přibližně Eulerovou metodou, tj.

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= (i+1)h, \\ x_{i+1} &= x_i + h\,y_i \\ y_{i+1} &= y_i + h((1 - x_i^2)\,y_i - x_i), \end{aligned}$$

kde $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $N = 4$, $h = \frac{1}{N} = 0,25$, $i = 0, 1, \ldots, 3$.

Výpočet je zaznamenán do tabulky:

i	t_i	x_i	y_i	$h\, f(t_i, x_i, y_i)$	$h\ g(t_i, x_i, y_i)$
0	0	1	1	0,25	-0,25
1	0,25	1,25	0,75	0,1875	-0,417969
2	0,5	1,4375	0,332031	0,083008	-0,447895
3	0,75	1,520508	-0,115864	-0,028966	-0,342125
4	1	1,491542	-0,457989		

Třetí sloupec tabulky jsou hledané přibližné hodnoty $x(t_i) \doteq x_i$ partikulárního řešení zadané diferenciální rovnice 2. řádu. ♡

◇ V příkladech modelu "dravec - kořist" najděte přibližnou hodnotu partikulárního řešení v bodě $t = T$ dané počáteční úlohy pro soustavu diferenciálních rovnic Eulerovou metodou s předepsaným krokem h.

4.18. $h = 0,5$, $T = 0,5$.

$$\begin{aligned} x' &= -0,03\,x + 0,001\,x\,y\,, \\ y' &= 0,05\,y - 0,001\,x\,y\,, \end{aligned} \qquad PP: \begin{cases} x(0) = 20 \\ y(0) = 50 \end{cases}.$$

4.19. $h = 0,1$, $T = 0,2$.

$$\begin{aligned} x' &= 2\,x - x\,y\,, \\ y' &= -y + 0,8\,x\,y\,, \end{aligned} \qquad PP: \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0,5 \end{cases}.$$

4.20. V příkladu modelu kyvadla najděte přibližnou hodnotu řešení v čase $t = 0,4$ dané počáteční úlohy:

$$x''(t) = -\frac{g}{L}\sin x(t)\,, \qquad PP: \begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}.$$

Řešte Eulerovou metodou s předepsaným počtem $N + 1 = 3$ uzlových bodů na intervalu $< 0; 0,4 >$. Předpokládejte: $\frac{g}{L} = 1$.

4.21. Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ najděte přibližné hodnoty řešení dané diferenciální rovnice druhého řádu, které vyhovuje počátečním podmínkám

$$x'' + t\,x' + x = 0\,, \qquad PP: \begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}.$$

Řešte Eulerovou metodou s předepsaným krokem $h = \frac{1}{4}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

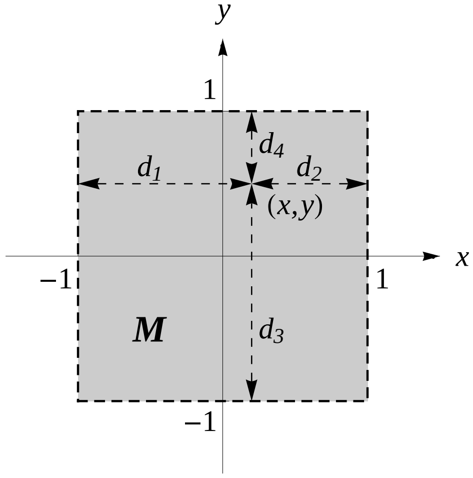
5 Funkce více proměnných, jejich spojitost a limita

5.1 Některé vlastnosti bodových množin v $\mathbb{R}^n$

V tomto odstavci budeme vyšetřovat tyto vlastnosti bodových množin v $\mathbb{R}^n$: otevřená množina, uzavřená množina, souvislá množina, jednoduše souvislá množina, omezená množina, konvexní množina a hranice množiny. Definice těchto pojmů najde čtenář v [MII], kapitola 5, odstavec 5.1.

5.1. Dokažme, že množina $M = (-1, 1) \times (-1, 1)$ je otevřená.

Řešení: Musíme dokázat, že libovolný bod $(x, y) \in M$ je vnitřní bod, tj. existuje okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(x, y)$ ležící uvnitř množiny M. Označme postupně d_1, d_2, d_3, d_4 vzdálenosti libovolného bodu množiny M od stran daného obdélníka (viz obr. 5.1), tj.
$d_1 = x + 1 > 0,\ d_2 = 1 - x > 0,$
$d_3 = y + 1 > 0,\ d_4 = 1 - y > 0$
a symbolem $d = \min\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$. Volíme-li poloměr okolí ε tak, aby $0 < \varepsilon < d$, platí $\mathcal{O}_\varepsilon(x, y) \subset M$.



Obr. 5.1

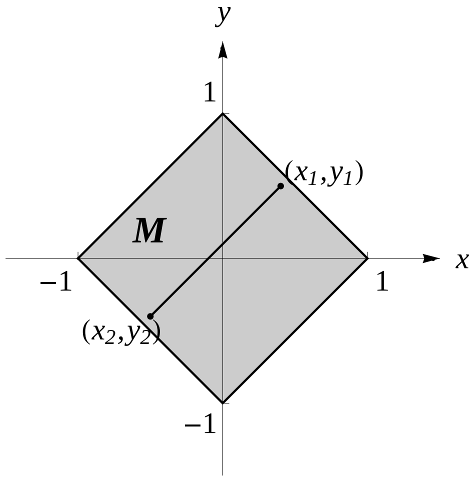
♡

5.2. Dokažme, že množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \leq 1\}$ je uzavřená a konvexní.

Řešení: Hranice množiny

$$\mathcal{H}(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| = 1\}$$

leží v množině M, množina je tedy uzavřená. Každé dva body z množiny M můžeme spojit úsečkou, která leží v množině M (viz obr. 5.2). Množina M je tedy konvexní.



Obr. 5.2

♡

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

◊ V následujících příkladech zjistěte, zda daná podmnožina $\mathbb{R}^2$ je otevřená nebo uzavřená nebo ani otevřená ani uzavřená. Množinu nakreslete.

5.3. **a)** $M_1 = \{(x, y)\,;\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. **b)** $M_2 = (1, 3) \times \langle 1, 2\rangle$.
c) $M_3 = \{(x, y);\ x < y < x + 3\}$. **d)** $M_4 = \langle 1, 3\rangle \times \langle 1, 2\rangle$.
e) $M_5 = \{(x, y);\ y - 1 \le x \le y + 1\}$. **f)** $M_6 = (1, 3) \times (1, 2)$.
g) $M_7 = \{(x, y);\ |x| \le |y|\}$. **h)** $M_8 = \mathbb{R} \times (1, 2)$.
i) $M_9 = \{(x, y);\ x^2 \le y \le x^2 + 1\}$. **j)** $M_{10} = \mathbb{R} \times \langle 1, 2\rangle$.

◊ V následujících příkladech zjistěte, zda daná podmnožina $\mathbb{R}^2$ je konvexní. Množinu nakreslete.

5.4. **a)** $M_1 = \{(x, y);\ |x| \ge |y|\}$. **b)** $M_2 = \{(x, y);\ |x + y| < 1\}$.
c) $M_3 = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$. **d)** $M_4 = \{(x, y);\ \frac{1}{4} < x^2 + y^2 \le 1\}$.
e) $M_5 = \{(x, y);\ |x| > 1\}$. **f)** $M_6 = \{(x, y);\ 0 < |x| \le 1\}$.

5.5. Dokažme, že množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{1}{100} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ je uzavřená oblast.

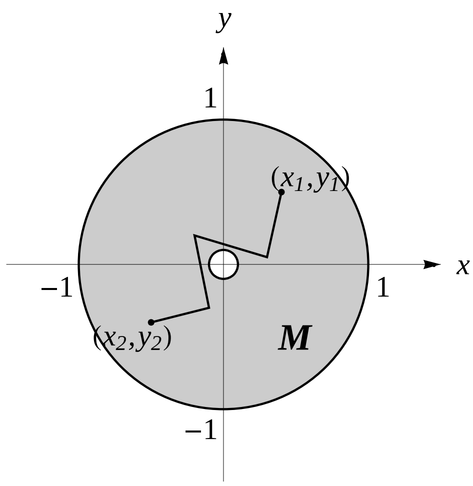
Řešení: Musíme dokázat, že vnitřek množiny je souvislý a množina obsahuje svoji hranici.
Vnitřek množiny

$M^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\ \wedge\ x^2 + y^2 > \frac{1}{100}\}$

je souvislá množina, každé dva body $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M^\circ$ mohou spojit lomenou čarou, která leží v M° (viz obr. 5.3).
Hranice množiny

$\mathcal{H}(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = 1 \vee x^2+y^2 = \frac{1}{100}\}$

leží celá v množině M (viz obr. 5.3). Množina M je tedy uzavřená oblast.



Obr. 5.3

♡

◊ V následujících příkladech zjistěte, zda daná podmnožina $\mathbb{R}^2$ je uzavřená oblast. Množinu nakreslete.

5.6. **a)** $M_1 = \{(x, y);\ |x| \ge |y|\}$. **b)** $M_2 = \{(x, y);\ |x - y| < 1\}$.
c) $M_3 = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \ge 1\}$. **d)** $M_4 = \{(x, y);\ 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$.
e) $M_5 = \{(x, y);\ |y| \ge 1\}$. **f)** $M_6 = \{(x, y);\ 0 < |y| \le 1\}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

5.7. Dokažme, že množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 2\}$ je omezená.

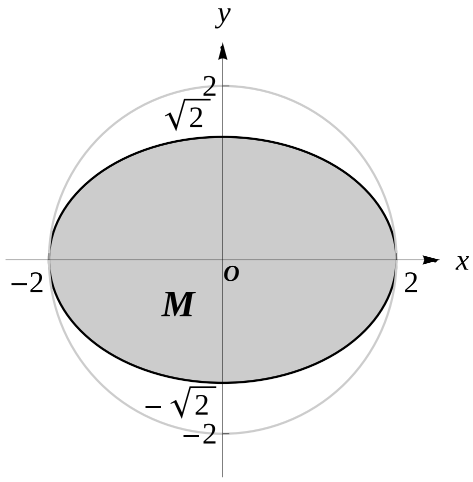
Řešení: Nerovnici upravíme:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1.$$

Množina M je tedy množina všech bodů ležících uvnitř a na elipse s hlavní poloosou $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = \sqrt{2}$ (viz obr. 5.4). Množina M je omezená, protože

$$\forall\ X = (x,y) \in M;\ \rho(X,O) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2.$$

Všechny body množiny M leží v kruhu o poloměru 2.



Obr. 5.4

♡

♢ V následujících příkladech zjistěte, zda daná podmnožina $\mathbb{R}^2$ je omezená. Množinu nakreslete.

5.8. **a)** $M_1 = \{(x,y);\ y \geq x^2\}$. **b)** $M_2 = \{(x,y);\ |y - x| < 2\ \wedge\ |x| < 2\}$.

c) $M_3 = \{(x,y);\ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. **d)** $M_4 = \{(x,y);\ |y| \leq 1\}$.

e) $M_5 = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \geq 4\ \vee\ 2x^2 + 5y^2 \leq 1\}$.

f) $M_6 = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq 4\ \wedge\ 2x^2 + 5y^2 \geq 1\}$.

5.2 Definiční obor funkce více proměnných

5.9. Určeme přirozený definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{y + x^2} + \sqrt{x^2 - y}$. Vyšetřeme vlastnosti této množiny (otevřená, uzavřená, omezená, konvexní, souvislá, hranice množiny).

Řešení: Definiční obor určíme z podmínky

$$y + x^2 \geq 0\ \wedge\ x^2 - y \geq 0.$$

Odtud

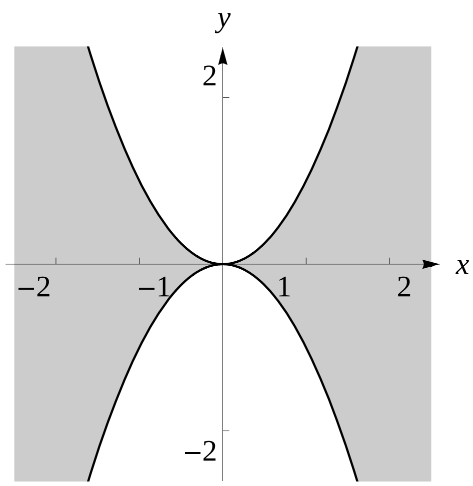
$$y \geq -x^2\ \wedge\ y \leq x^2,$$

tj.

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -x^2 \leq y \leq x^2\}.$$

$\mathcal{D}(f)$ je množina uzavřená a souvislá (není omezená, není konvexní) viz obr. 5.5 . Nyní určíme hranici $\mathcal{D}(f)$:

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = \pm x^2\}.$$



Obr. 5.5

♡

◊ V následujících příkladech určete definiční obor dané funkce. Zjistěte o jakou množinu se jedná (otevřená, uzavřená, omezená, konvexní, souvislá). Množinu nakreslete a určete její hranici.

5.10. **a)** $f(x,y) = \sqrt{(y-x)^2 - 4}$. **b)** $f(x,y) = \ln(xy)$.

c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$. **d)** $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}}{xy}$.

e) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 4}$. **f)** $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

g) $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. **h)** $f(x,y) = \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{xy}$.

i) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) + \ln((y-x)^2 - 4)$.

j) $f(x,y) = \sqrt{x} + \ln(1 - x^2 - y^2)$.

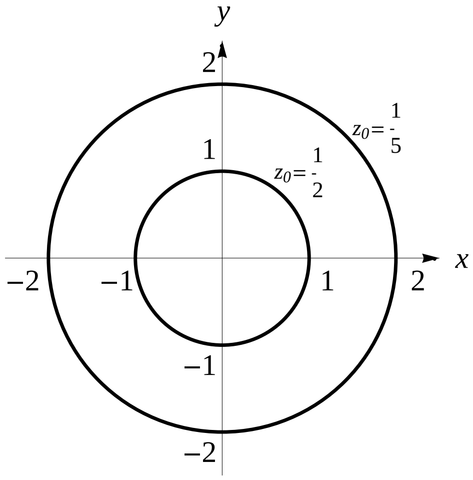
5.11. Určeme z_0-vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ pro $z_0 = \frac{1}{2}$ a $z_0 = \frac{1}{5}$.

Řešení: Nejdříve určíme definiční obor. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.
z_0-vrstevnice je množina všech bodů $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$, pro kterou platí $f(x,y) = z_0$. Pro $z_0 = \frac{1}{2}$ je z_0-vrstevnice množina bodů $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pro kterou platí:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

z_0-vrstevnice je tedy kružnice o poloměru 1.
Pro $z_0 = \frac{1}{5}$ dostáváme:



Obr. 5.6

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

z_0-vrstevnice je tedy kružnice o poloměru 2. Obě vrstevnice jsou zakresleny na obrázku 5.6. ♡

◊ V následujících příkladech určete z_0-vrstevnice funkce f pro daná z_0. Vrstevnice nakreslete.

5.12. **a)** $f(x,y) = x - y,\ z_0 = -1;\ 0;\ 1.$ **b)** $f(x,y) = x^2 y,\ z_0 = -1;\ 0;\ 1.$

c) $f(x,y) = x^2 + 4y^2,\ z_0 = -1;\ 1;\ 4.$ **d)** $f(x,y) = \frac{y}{x^2},\ z_0 = -1;\ 0;\ 1.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

5.3 Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

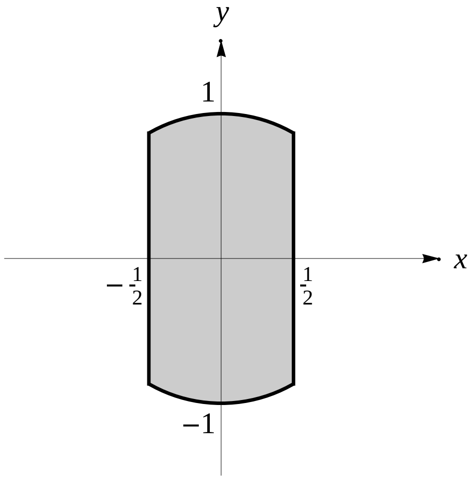
5.13. Určeme definiční obor zobrazení $\boldsymbol{f}(x,y) = (\sqrt{1-x^2-y^2}, \arcsin 2x)$. Zjistěme o jakou množinu se jedná (otevřená, uzavřená, omezená, konvexní, souvislá). Určeme hranici $\mathcal{D}(\boldsymbol{f})$. Narýsujme obrázek.

Řešení: Nejprve určíme definiční obory jednotlivých souřadnicových funkcí:
$f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\quad f_2(x,y) = \arcsin 2x$.
$\mathcal{D}(f_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$, $\mathcal{D}(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\}$.
Platí $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$, tj.

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2 \le 1) \wedge (-\tfrac{1}{2} \le x \le \tfrac{1}{2})\}.$$

$\mathcal{D}(\boldsymbol{f})$ je uzavřená, omezená, konvexní, souvislá množina (viz obr. 5.7).
Nyní určíme hranici $\mathcal{D}(\boldsymbol{f})$:

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(\boldsymbol{f})) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2 = 1 \wedge x \in \langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle) \vee (\langle \pm\tfrac{1}{2}, y\rangle,\ y \in \langle -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\rangle)\}.$$



Obr. 5.7

♡

◇ V následujících příkladech určete definiční obor daného zobrazení. Zjistěte o jakou množinu se jedná (otevřená, uzavřená, omezená, konvexní, souvislá). Určete hranici $\mathcal{D}(\boldsymbol{f})$. Načrtněte obrázek.

5.14. **a)** $\boldsymbol{f}(x,y) = (\ln \frac{x}{y}, \sqrt{x+y})$. **b)** $\boldsymbol{f}(x,y) = (\ln(xy), \arccos(y+x))$.

c) $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\dfrac{y}{x+1}, \dfrac{y}{x}, \dfrac{y}{x-1}\right)$. **d)** $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\sqrt{y-\frac{x}{2}}, \sqrt{y+\frac{x}{2}}, \frac{y}{x}\right)$.

e) $\boldsymbol{f}(x,y) = (x\,y, \sqrt{y\,(x^2-1)}, \sqrt{4-x^2-y^2})$.

f) $\boldsymbol{f}(x,y) = (\ln(y-x), \ln(y+x), \ln(1-x^2-y^2))$.

5.4 Limita funkce více proměnných

5.15. Vypočtěme $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{x+y+1}}{x+y}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Řešení: Při výpočtu limity použijeme metody a věty analogické těm, které známe z teorie funkcí jedné proměnné. Zde například rozšíříme funkci výrazem $1+\sqrt{x+y+1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{x+y+1}}{x+y} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{x+y+1}}{x+y}\cdot\frac{(1+\sqrt{x+y+1})}{(1+\sqrt{x+y+1})} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x-y}{(x+y)(1+\sqrt{x+y+1})} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{1+\sqrt{x+y+1}} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

♡

◊ V následujících příkladech vypočtěte uvedené limity.

5.16. **a)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$. **b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1-\sqrt{xy}}{1-xy}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$. **d)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} 2xy}{xy}$.

5.17. Vypočtěme $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x+y)}{x^2+y^2}$.

Řešení: Při výpočtu limit tohoto typu někdy pomáhá přechod k polárním souřadnicím, kde pól volíme v bodě, v němž počítáme limitu. Dosaďme proto $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Bod $(0,0)$ je jediný bod v $\mathbb{R}^2$, pro nějž je $r=0$. Vyšetřujeme tedy limitu

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2} = \\ &= \lim_{r\to 0} r\ \cos^2\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi) = 0, \quad \forall\varphi\in\langle 0,2\pi).\end{aligned}$$

Platí tedy $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x+y)}{x^2+y^2} = 0.$

5.18. Vypočítejme $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

Řešení: Opět použijeme polární souřadnice. Dosaďme za $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$ a vyšetřujeme limitu

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{r^2} = \\ &= \lim_{r\to 0}(\cos\varphi+\sin\varphi)^2 = \lim_{r\to 0}(1+2\cos\varphi\ \sin\varphi) = \\ &= \lim_{r\to 0}(1+\sin 2\varphi).\end{aligned}$$

Tato limita je pro různá φ různá. Proto limita $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x+y)}{x^2+y^2}$ neexistuje.

◊ Při výpočtu následujících limit použijte polární souřadnice.

5.19. **a)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x+y}$ **b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$ **d)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{(x-1)(y-1)}$ **f)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

6 Derivace funkcí více proměnných

V této kapitole se předpokládá znalost parciálních derivací prvního a vyššího řádu funkcí dvou proměnných a gradientu funkcí dvou proměnných. Teorie týkající se derivování funkcí více proměnných je ve skriptech [MII], kapitola 6.

6.1 Gradient funkce více proměnných

Gradient funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathcal{D}(f)$ je vektor o n souřadnicích

$$\operatorname{grad} f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0),\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right),$$

pokud $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i = 1, \ldots, n$ parciální derivace funkce f podle proměnné x_i v bodě X_0 existují. Počítají se analogicky jako pro funkci dvou proměnných. Při geometrickém znázornění je vektor $\operatorname{grad} f(X_0)$ umístěn do bodu X_0, tj. bod X_0 je počáteční bodem vektoru.

6.1. Určeme gradient funkce $f(x, y, z) = 2xy^2 + \sin z$ v obecném bodě $X = (x, y, z)$ a konkrétním bodě $A = (-1, 1, 0)$.

Řešení: Nejprve vypočteme parciální derivace 1. řádu funkce f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \cos z\,.$$

Gradient funkce f v bodě X je vektor $\operatorname{grad} f(X) = (2y^2,\ 4xy,\ \cos z)$, jehož souřadnice závisí na souřadnicích bodu X. Pro bod $A = (-1, 1, 0)$ je $\operatorname{grad} f(A) = (2,\ -4,\ 1)$. ♡

◇ Vypočtěte gradient následujících funkcí f v bodě A.

6.2. **a)** $f(x, y, z) = \dfrac{y^2}{x + 2z}$, $\quad A = (3, 2, -1)$.

b) $f(x, y, z) = 8\sqrt{x^2 + \ln(yz)}$, $\quad A = (-4, 1, 1)$.

c) $f(x, y, z) = z \cdot \arcsin(3x + y)$, $\quad A = (\frac{1}{3}, -1, 2)$.

d) $f(x, y, z) = \dfrac{y + 3^z}{x^2 z}$, $\quad A = (-1, -2, 1)$.

e) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3^2 - \dfrac{x_1}{x_4}$, $\quad A = (1, 2, \frac{1}{2}, -1)$.

f) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2\, x_4 - x_2\, x_3^2\, \mathrm{e}^{x_5}$, $\quad A = (1, -1, 1, -1, 0)$.

6.2 Derivace ve směru

Parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ podle proměnné x_i udává rychlost změny funkčních hodnot ve směru vektoru $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ – jednička je na i-tém místě. Derivace funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $X_0 \in \mathcal{D}(f)$ ve směru vektoru $\vec{a}$ je definována vztahem

$$Df(X_0, \vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + t\vec{a}) - f(X_0)}{t}\,,$$

kde vektor $\vec{a}$ je jednotkový, tj. $||\vec{a}|| = 1$. Udává rychlost změny funkčních hodnot ve směru vektoru $\vec{a}$. Pro výpočet derivace $Df(X_0, \vec{a})$, kde funkce f je třídy $C^1(G)$, G je otevřená množina a $X_0 \in G$, můžeme použít vztah

$$Df(X_0, \vec{a}) = \operatorname{grad} f(X_0) \cdot \vec{a}\,.$$

6.3. Určeme z definice derivaci funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y+1)}$ v bodě $A = (0,-1)$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{a}$ příslušného k vektoru $\vec{v} = (2\sqrt{2}, 1)$.

Řešení: Protože $||\vec{v}|| = ||(2\sqrt{2},1)|| = \sqrt{9} = 3$, je $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{v} = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$. Při výpočtu směrové derivace $Df(A, \vec{a})$ uvažujeme pouze funkční hodnoty $f(x,y)$ pro body (x,y) ležící na přímce, která prochází bodem A a má směrový vektor $\vec{a}$. Parametrizaci této přímky

$$A + t\vec{a} = (0,-1) + t\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{2\sqrt{2}\,t}{3},\ -1 + \tfrac{t}{3}\right),$$

tj. $x = \frac{2\sqrt{2}\,t}{3}$, $y = -1 + \frac{t}{3}$ dosaďme do f:

$$f(A + t\vec{a}) = \sqrt[3]{\left(\frac{2\sqrt{2}\,t}{3}\right)^2 \left(-1 + \frac{t}{3} + 1\right)} = \sqrt[3]{\frac{8t^3}{27}} = \frac{2}{3}\,t\,.$$

Derivace funkce f v bodě A ve směru jednotkového vektoru $\vec{a}$ je

$$Df(A, \vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{2}{3}\,t - \sqrt[3]{0 \cdot (-1+1)}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

Přesvědčte se, že v bodě A gradient funkce f neexistuje. V tomto případě nelze použít vztah $Df(X_0, \vec{a}) = \operatorname{grad} f(X_0) \cdot \vec{a}$. ♡

◇ Podobně vypočtěte pomocí definice derivaci funkce f v bodě A ve směru jednotkového vektoru $\vec{a}$ příslušného k vektoru $\vec{v}$.

6.4. **a)** $f(x,y) = \sqrt[3]{(x-1)^3 + 3y^3}$, $A = (1,0)$, $\vec{v} = (3,-2)$.

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x\,(y-2)^2}$, $A = (0,2)$, $\vec{v} = (1,1)$.

c) $f(x,y) = \ln(3^x + y^2)$, $A = (0,0)$, $\vec{v} = (-2,1)$.

d) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$, $A = (-1,1)$, $\vec{v} = (-1,-3)$.

e) $f(x,y,z) = 2 \arcsin \dfrac{x+y+z}{2}$, $A = (5,-1,-3)$, $\vec{v} = (2,-3,1)$.

f) $f(x,y,z) = x\,\mathrm{e}^{yz}$, $A = (2, 0, \frac{17}{3})$, $\vec{v} = (6,-3,2)$.

6.5. Určeme derivaci funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ v bodě $A = (1,-2,2)$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{a}$ příslušného k vektoru $\vec{v} = (\sqrt{2}, 1, 1)$.

Řešení: Můžeme postupovat stejně jako v předchozích příkladech anebo použít $\operatorname{grad} f(A)$. Parciální derivace 1. řádu funkce f v bodě $X = (x,y,z)$ jsou:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(X) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(X) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Tedy

$$\operatorname{grad} f(X) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,(x,y,z)$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{grad} f(1,-2,2) = \tfrac{1}{3}\,(1,-2,2)\,.$$

Protože $||\vec{v}|| = ||(\sqrt{2},1,1)|| = 2$, je $\vec{a} = \frac{1}{2}\,(\sqrt{2},1,1)$. Nyní dosadíme do formule a vypočteme derivaci funkce f v bodě A ve směru jednotkového vektoru $\vec{a}$.

$$Df(A,\vec{a}) = \operatorname{grad} f(A)\cdot\vec{a} = \tfrac{1}{3}\,(1,-2,2)\cdot\tfrac{1}{2}\,(\sqrt{2},1,1) = \frac{1}{6}\,(\sqrt{2}-2+2) = \frac{\sqrt{2}}{6} \qquad \heartsuit$$

$\diamondsuit$ Pro následující funkce vypočtěte $Df(A,\vec{a})$, kde $\vec{a}$ je jednotkový vektor příslušný k vektoru $\vec{v}$.

6.6. **a)** $f(x,y) = \sin(x^2y),\ A=(2,0),\ \vec{v}=(-3,4).$

b) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy,\ A=(1,1),\ \vec{v}=(5,3).$

c) $f(x,y,z) = 4x+y^2+z,\ A=(0,0,0),\ \vec{v}=(1,1,2).$

d) $f(x,y,z) = \operatorname{arccotg}(x+y+2z),\ A=(1,2,-1),\ \vec{v}=(2,-1,2).$

e) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 5x_1x_3-2x_2-x_4^3,\ A=(1,2,1,-1),\ \vec{v}=(4,-3,-1,2).$

f) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ln(1+x_1-x_3x_4),\ A=(-1,5,-1,1),\ \vec{v}=(2,2,-3,-6).$

6.3 Derivování složených funkcí

Složením funkce $g:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ se zobrazením $\boldsymbol{h}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vznikne složená funkce n proměnných. Píšeme $f = g\circ\boldsymbol{h}$. Při skládání za proměnné a_i, $i=1,\dots,m$ vnější funkce g dosazujeme souřadnicové funkce h_i, $i=1,\dots,m$ zobrazení $\boldsymbol{h}$, tj.

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = g(h_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\, h_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\, \dots,\, h_m(x_1,x_2,\dots,x_n))\,.$$

Předpokládejme, že $\mathcal{H}(\boldsymbol{h}) \subseteq \mathcal{D}(g)$, tedy $\mathcal{D}(f)$ není prázdná množina.

6.7. Napišme funkční předpis funkce $f = g\circ\boldsymbol{h}$. Vznikne složením funkce tří proměnných $g(a,b,c) = a^2+3bc$ se zobrazením $\boldsymbol{h}(x,y) = (\sqrt{xy},\ x,\ x+y)$.

Řešení: Složením funkce $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ se zobrazením $\boldsymbol{h}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ vznikne následující funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = g(\boldsymbol{h}(x,y)) = g(\sqrt{xy},\ x,\ x+y) = (\sqrt{xy})^2 + 3x(x+y) = 4xy+3x^2\,.$$

Zřejmě $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}^3$ a $\mathcal{D}(\boldsymbol{h}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy\ge 0\}$. Protože je vnější funkce definována na $\mathbb{R}^3$, je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(\boldsymbol{h})$. Tedy pozor $\mathcal{D}(f)\ne\mathbb{R}^2$. $\heartsuit$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ Vytvořte formálně předpisy složených funkcí $f = g \circ \boldsymbol{h}$.

6.8. **a)** $g(a,b) = \dfrac{\ln b}{a}$, $\boldsymbol{h}(x,y) = (4,\, y\mathrm{e}^x)$.

b) $g(a) = a^7 + 5$, $h(x,y,z) = \sqrt[7]{xyz - 5}$.

c) $g(a,b,c) = c \cdot \sqrt{9a + b^2}$, $\boldsymbol{h}(x) = (x^2,\, 4x,\, \mathrm{tg}\, x)$.

d) $g(a,b) = b^3 + \arcsin a$, $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (\sin(x + \sqrt{z}),\, \cos y)$, $-\frac{\pi}{2} \le x + \sqrt{z} \le \frac{\pi}{2}$.

Parciální derivaci složené funkce $f = g \circ \boldsymbol{h}$ podle x_i, $i = 1, \ldots, n$ vypočteme ze vztahu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ \boldsymbol{h}) = \frac{\partial g}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial h_m}{\partial x_i}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Jsou to opět funkce n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6.9. Určeme parciální derivace 1. řádu funkce $f(x,y) = 7x + g(xy^2,\, 3\ln y)$, jestliže neznáme konkrétně předpis pro funkci g, ale víme, že je třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Řešení: Parciální derivace počítáme pomocí pravidla pro derivaci součtu funkcí, při čemž druhý sčítanec je funkce složená. Vnější funkce g dvou proměnných, označme je a, b, je složená se zobrazením $\boldsymbol{h}(x,y) = (xy^2,\, 3\ln y)$. Tedy $f(x,y) = 7x + g(\boldsymbol{h}(x,y))$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 7 + \frac{\partial}{\partial x}[\,g(\overbrace{xy^2}^{a},\, \overbrace{3\ln y}^{b})] = 7 + \frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(3\ln y) = \\
&= 7 + \frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \cdot y^2 + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b) \cdot 0 = 7 + \frac{\partial g}{\partial a}(xy^2,\, 3\ln y) \cdot y^2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 + \frac{\partial}{\partial y}[\,g(\overbrace{xy^2}^{a},\, \overbrace{3\ln y}^{b})] = \frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(3\ln y) = \\
&= \frac{\partial g}{\partial a}(xy^2,\, 3\ln y) \cdot 2xy + \frac{\partial g}{\partial b}(xy^2,\, 3\ln y) \cdot \frac{3}{y}
\end{aligned}$$

$\heartsuit$

6.10. Je dána funkce $f(x) = (x-2) \cdot g\left(\mathrm{e}^x,\, \sin x,\, \dfrac{1}{x+1}\right)$, kde $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

a) Vypočtěme $f'(x)$.

b) Vypočtěme $f'(0)$, je-li $g(a,b,c) = ab + c$.

Řešení:

a) Funkci derivujeme podle pravidla pro derivaci součinu funkcí, přičemž druhý činitel je funkce složená. Vnější funkce g tří proměnných a, b, c je složená se zobrazením

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\boldsymbol{h}(x) = (\mathrm{e}^x, \sin x, \frac{1}{x+1})$. Tedy $f(x,y) = (x-2) \cdot g(\boldsymbol{h}(x))$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= g(\mathrm{e}^x,\ \sin x,\ \tfrac{1}{x+1}) + (x-2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}[\, g(\overbrace{\mathrm{e}^x}^{a},\ \overbrace{\sin x}^{b},\ \overbrace{\tfrac{1}{x+1}}^{c})] \\
&= g(\boldsymbol{h}(x)) + (x-2)\left[\frac{\partial g}{\partial a}(a,b,c) \cdot \mathrm{e}^x + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b,c) \cdot \cos x + \frac{\partial g}{\partial c}(a,b,c) \cdot \frac{-1}{(x+1)^2}\right] \\
&= g(\boldsymbol{h}(x)) + (x-2)\left[\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x)) \cdot \mathrm{e}^x + \frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x)) \cdot \cos x - \frac{\partial g}{\partial c}(\boldsymbol{h}(x)) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\right]
\end{aligned}
$$

b) Derivaci funkce f jsme již vyjádřili pomocí funkce g a jejích parciálních derivací. Nyní je pro danou funkci $g(a,b,c) = ab + c$ vypočteme a složíme je se zobrazením $\boldsymbol{h}(x)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial a}(a,b,c) = b, && \frac{\partial g}{\partial b}(a,b,c) = a, && \frac{\partial g}{\partial c}(a,b,c) = 1, \\
&\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x)) = \sin x, && \frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x)) = \mathrm{e}^x, && \frac{\partial g}{\partial c}(\boldsymbol{h}(x)) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Protože $g(\boldsymbol{h}(x)) = \mathrm{e}^x \sin x + \dfrac{1}{x+1}$, je

$$
f'(x) = \mathrm{e}^x \sin x + \frac{1}{x+1} + (x-2) \cdot \left[\sin x\, \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \cos x - \frac{1}{(x+1)^2}\right].
$$

Derivace funkce f v bodě $x = 0$ je

$$
f'(0) = 0 + 1 - 2 \cdot [0 + 1 - 1] = 1.
$$

♡

◇ Vypočtěte derivace 1. řádu následujících funkcí, je-li g spojitá a má spojité první parciální derivace. Rozmyslete si, pomocí kterých operací, jsou funkce f tvořeny.

6.11. **a)** $f(x,y) = x \ln y + g(x^2,\ xy^2)$.

b) $f(x,y,z) = z\, g(yz,\ \mathrm{e}^x)$.

c) $f(x) = \dfrac{g(2,\ \ln x,\ x^3)}{x}$.

d) $f(x,y,z) = g(y^2 - \sin(xz))$.

e) $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{y} + g(2x,\ \sqrt{x^2+y},\ 1-y)$.

f) $f(x,y) = \dfrac{g(\frac{x}{y},\ \frac{y}{x})}{x}$.

g) $f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot g(\ln x^2,\ \cos^2 x)$.

h) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{z} \cdot g(xy + xz^2)$.

i) $f(x,y,z) = \sqrt{2x+y} + g(\frac{z}{x^2},\ 2\mathrm{e}^y\sqrt{z}\,)$.

j) $f(x) = 3x \cdot g(7,\ x^3,\ \operatorname{tg} x)$.

k) $f(x,y) = \dfrac{y}{g(\arcsin x + 7y)}$.

l) $f(x,y,z) = 4\, g(\mathrm{e}^{yz},\ 8x,\ \frac{1}{\sqrt{y}})$.

6.12. Určeme hodnotu parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \dfrac{yz^2}{g(\frac{x}{z}+\sqrt{xy})}$ podle z v bodě $A=(1,4,-1)$, je-li $g(a) = \sqrt[3]{2-a^2}$.

Řešení: Nejprve vyjádříme $\frac{\partial f}{\partial z}$ v obecném bodě $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ pomocí obecné funkce g a její derivace. Funkci f derivujeme podle pravidla pro derivaci podílu funkcí, kde ve jmenovateli je složená funkce. Vnější funkce g jedné proměnné a je složená s funkcí $h(x,y,z) = \frac{x}{z}+\sqrt{xy}$. Tedy $f(x,y,z) = \dfrac{yz^2}{g(h(x,y,z))}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x}) = \frac{2yz\cdot g(\frac{x}{z}+\sqrt{xy}) - yz^2\cdot \frac{\partial}{\partial z}[\,g(\overbrace{\tfrac{x}{z}+\sqrt{xy}}^{a})\,]}{g^2(\frac{x}{z}+\sqrt{xy})} = \frac{2yz\cdot g(h(\boldsymbol{x})) - yz^2\cdot g'(a)\cdot\frac{-x}{z^2}}{g^2(h(\boldsymbol{x}))} =$$

$$= \frac{2yz\cdot g(h(\boldsymbol{x})) + xy\cdot g'(h(\boldsymbol{x}))}{g^2(h(\boldsymbol{x}))}$$

Protože chceme určit derivaci v bodě $A=(1,4,-1)$ a $h(A)=1$, vypočtěme hodnoty $g(1)$ a $g'(1)$ pro zadanou funkci $g(a) = \sqrt[3]{2-a^2}$.

$$g(1) = 1\,, \quad g'(a) = \frac{-2a}{3\,(2-a^2)^{\frac{2}{3}}} \qquad \Longrightarrow \qquad g'(1) = -\frac{2}{3}$$

Parciální derivace funkce f podle z v bodě A je

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,4,-1) = \frac{-8\cdot g(1) + 4\cdot g'(1)}{g^2(1)} = -8-\frac{8}{3} = -\frac{32}{3}\,. \qquad \heartsuit$$

Poznámka: Známe-li předpis funkce g, můžeme do předpisu funkce f přímo dosadit g, tj. $f(x,y) = \dfrac{yz^2}{\sqrt[3]{2-(\frac{x}{z}+\sqrt{xy})^2}}$ a následně počítat $\dfrac{\partial f}{\partial z}$. Derivujeme však komplikovanější výraz.

$\diamondsuit$ Vypočtěte požadovanou derivaci následujících funkcí v daném bodě.

6.13. **a)** $f(x,y) = 3x + g(2x,\ x\mathrm{e}^y)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,0)$, je-li $g(a,b) = 6\sqrt{a+b}\,$.

b) $f(x) = 10 + g(\arcsin x,\ x-1)$; $f'(0)$, je-li $g(a,b) = \sin(ab)$.

c) $f(x,y) = \operatorname{arccotg} x\cdot g(\frac{1}{x},\ 7y,\ xy)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,-1)$, je-li $g(a,b,c) = \mathrm{e}^{a+c}$.

d) $f(x,y) = \dfrac{g(x^2-y^2)}{y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)$, je-li $g(a) = \operatorname{arctg}(a^2+1)$.

e) $f(x,y) = 3xy^2 + g(\sqrt{1+y^2},\ xy)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, je-li $g(a,b) = \dfrac{a^2}{b-1}\,$.

f) $f(x) = \sqrt{x}\ g(x,\ \mathrm{e}^{1-x},\ \ln x)$; $f'(1)$, je-li $g(a,b,c) = a + \dfrac{a-c}{b}\,$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

g) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{g(xyz,\, x-y)}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\pi,0,1)$, je-li $g(a,b) = \sqrt{b}\,\cos a$.

h) $f(x,y,z) = xz^3 + g(\mathrm{e}^{xy} + y^z)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,3)$, je-li $g(a) = \sqrt{a-1}$.

i) $f(x,y) = \ln^2 y - g(\frac{x}{y},\, 10,\, \operatorname{tg} x)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2\pi,1)$, je-li $g(a,b,c) = 2a + \arcsin bc$.

6.14. Určeme parciální derivace 2. řádu funkce $f(x,y) = g(x-y^2, 3y)$, jestliže je g třídy $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Řešení: Nejprve vypočteme první parciální derivace složené funkce f, která je složená z vnější funkce g dvou proměnných, označme je a, b a ze zobrazení $\boldsymbol{h}(x,y) = (x-y^2, 3y)$. Tedy $f(x,y) = g(\boldsymbol{h}(x,y))$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[\,g(\overbrace{x-y^2}^{a},\ \overbrace{3y}^{b})] = \frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\cdot 0 = \frac{\partial g}{\partial a}(x-y^2,3y) =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[\,g(\overbrace{x-y^2}^{a},\ \overbrace{3y}^{b})] = \frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\cdot(-2y) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\cdot 3 =$$
$$= -2y\,\frac{\partial g}{\partial a}(x-y^2,3y) + 3\,\frac{\partial g}{\partial b}(x-y^2,3y) = -2y\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y)) + 3\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y))$$

Nyní můžeme určit druhé parciální derivace. Připomeňme, že platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, protože $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Uvědomme si, že funkce $\dfrac{\partial g}{\partial a}(x-y^2,3y)$ a $\dfrac{\partial g}{\partial b}(x-y^2,3y)$ jsou **složené**.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[\,\frac{\partial g}{\partial a}(\overbrace{x-y^2}^{a},\ \overbrace{3y}^{b})] = \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(a,b)\cdot 1 + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(a,b)\cdot 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(x-y^2,3y) =$$
$$= \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x,y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[\,\frac{\partial g}{\partial a}(\overbrace{x-y^2}^{a},\ \overbrace{3y}^{b})] = \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(a,b)\cdot(-2y) + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(a,b)\cdot 3 =$$
$$= -2y\,\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(x-y^2,3y) + 3\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(x-y^2,3y) =$$
$$= -2y\,\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x,y)) + 3\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x,y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[\,-2y\,\frac{\partial g}{\partial a}(\overbrace{x-y^2}^{a},\ \overbrace{3y}^{b}) + 3\,\frac{\partial g}{\partial b}(\overbrace{x-y^2}^{a},\ \overbrace{3y}^{b})] = -2\,\frac{\partial g}{\partial a}(a,b) +$$
$$-\,2y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(a,b)\cdot(-2y) + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(a,b)\cdot 3\right] + 3\left[\frac{\partial^2 g}{\partial b \partial a}(a,b)\cdot(-2y) + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(a,b)\cdot 3\right] =$$
$$= -2\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y)) + 4y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x,y)) - 12y\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)) + 9\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x,y))$$

Protože $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, použili jsme při výpočtu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ identitu $\dfrac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial b \partial a}$. ♡

◇ Vypočtěte derivace 2. řádu následujících funkcí, má-li g spojité druhé derivace.

6.15. **a)** $f(x,y,z) = xy + g(3xz - 5,\, 2yz)$. **b)** $f(x,y) = x\, g(\sqrt{y} + 3x)$.

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg} y + g(\frac{x}{2},\, \mathrm{e}^{xy})$. **d)** $f(x) = g(x^2,\, \sin x,\, 7x)$.

◇ Vypočtěte požadovanou derivaci následujících funkcí v daném bodě.

6.16. **a)** $f(x,y) = \frac{x}{y} + g(1 + \operatorname{tg} x,\, xy,\, y^2)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \frac{1}{2})$, je-li $g(a,b,c) = a \cos(bc)$.

b) $f(x,y,z) = \dfrac{g(\sqrt{x + y^2})}{z}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1, \sqrt{2}, 3)$, je-li $g(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a+1}}$.

c) $f(x) = x \cdot g(\mathrm{e}^{x-1},\, \ln x)$; $f''(1)$, je-li $g(a,b) = a \arcsin b$.

d) $f(x,y,z) = g(x^2 + y^2,\, xz)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,-1,1)$, je-li $g(a,b) = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

6.17. Entalpie H je dána jako funkce teploty T a tlaku p. Pišme $H = g(T,p)$. Vypočítejme rychlost změny entalpie v závislosti na teplotě pro jeden mol plynu, který se řídí van der Waalsovou stavovou rovnicí

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

kde a, b, R jsou konstanty.

Řešení: Je dobré umět pracovat s jinými proměnnými než je x a y. Ze stavové rovnice plyne, že $p = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}$. Pak $H = g(T,p) = g\left(T,\, \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) = f(T,V)$. Entalpie je dána složenou funkcí $f = g \circ \boldsymbol{h}$. Vnější funkce g dvou proměnných T, p je složená se zobrazením $\boldsymbol{h}(T,V) = \left(T,\, \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)$. Funkce $\dfrac{\partial f}{\partial T}$ popisuje rychlost změny entalpie v závislosti na teplotě. Určeme ji:

$$\frac{\partial f}{\partial T}(T,V) = \frac{\partial}{\partial T}[\, g(T, \overbrace{\tfrac{RT}{V-b} - \tfrac{a}{V^2}}^{p})] = \frac{\partial g}{\partial T}(T,p) + \frac{\partial g}{\partial p}(T,p) \cdot \frac{\partial}{\partial T}(\tfrac{RT}{V-b} - \tfrac{a}{V^2}) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial T}(T,\, \tfrac{RT}{V-b} - \tfrac{a}{V^2}) + \frac{\partial g}{\partial p}(T,\, \tfrac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}) \cdot \frac{R}{V-b}\,.$$ ♡

Upozornění : Ve fyzikálně chemických disciplinách se často používá nedůsledná, ale úsporná symbolika. Obvykle se píše $H = H(T,p) = H\left(T,\, \frac{R}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) = H(T,V)$, tj. písmeno H vystupuje ve třech různých významech: jako označení závisle proměnné, jako označení funkce proměnných T, p (místo našeho g) a jako označení složené funkce proměnných T, V (místo našeho f). Pak $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \cdot \frac{R}{V-b}$. Je zřejmé, že při použití této symboliky je nutné uvést indexy označující proměnné považované za konstantní.

6.18. Vypočítejte koeficient stlačitelnosti $\kappa = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ a koeficient objemové roztažnosti $\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ pro jeden mol reálného plynu, který se řídí stavovou rovnicí $pV = zRT$, kde $z = z(p,T)$ je kompresibilitní faktor, R je konstanta.

6.19. Vypočítejte $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ pro jeden mol ideálního plynu, je-li entropie S dána jako funkce teploty T a tlaku p. (Ideální plyn se řídí stavovou rovnicí $pV = RT$, kde R je konstanta.)

6.20. Rozdíl molárních tepel je definován vztahem: $C_p - C_V := \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$, kde $U = U(T,V)$ je vnitřní energie, $H = U + pV$ je entalpie. Dokažte, že pro každý plyn platí $C_p - C_V = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Derivace zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

Derivací zobrazení $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ v bodě $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rozumíme matici funkcí typu (k,n)

$$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

Též mluvíme o Jacobiho matici zobrazení $\boldsymbol{f}$. Řádky matice jsou gradienty souřadnicových funkcí f_i, $i = 1, \ldots, k$ zobrazení $\boldsymbol{f}$.

6.21. Určeme Jacobiho matici zobrazení $\boldsymbol{f}$ v obecném bodě $\boldsymbol{x}$ a konkrétním bodě A.

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (2xy^2,\, 7x + y,\, x^4)$, $\quad A = (1,-2)$.

b) $\boldsymbol{f}(x) = (3\cos x,\, \sin x)$, $\quad A = \pi$.

c) $f(x,y,z) = x^2y + xz^2$, $\quad A = (3,1,-1)$.

Řešení:

a) Zobrazení $\boldsymbol{f}(x,y) = (2xy^2,\, 7x+y,\, x^4)$ je $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$. Jacobiho matice tohoto zobrazení je typu $(3,2)$. V obecném bodě $\boldsymbol{x} = (x,y)$ má tvar

$$J_{\boldsymbol{f}}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2) & \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(7x+y) & \frac{\partial}{\partial y}(7x+y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^4) & \frac{\partial}{\partial y}(x^4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 7 & 1 \\ 4x^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

V bodě $A=(1,-2)$ dostaneme číselnou matici $J_{\boldsymbol{f}}(1,-2)=\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 7 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Zobrazení $\boldsymbol{f}(x)=(3\cos x,\, \sin x)$ je z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$. Poznamenejme, že je parametrizací elipsy se středem $(0,0)$, délka hlavní poloosy je 3 a vedlejší poloosy je 1. Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{f}$ je typu $(2,1)$. V obecném bodě x má tvar

$$J_{\boldsymbol{f}}(x)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(3\cos x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\sin x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3\sin x \\ \cos x \end{bmatrix}.$$

V bodě $A=\pi$ dostaneme matici o jednom sloupci $J_{\boldsymbol{f}}(\pi)=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, který lze interpretovat jako tečný vektor k elipse v bodě $\boldsymbol{f}(\pi)=(-3,0)$.

c) Zobrazení $f(x,y,z)=x^2y+xz^2$ je funkce tří proměnných definovaná na $\mathbb{R}^3$. Jacobiho matice funkce f je typu $(1,3)$. V obecném bodě $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ má tvar

$$J_f(x,y,z)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+xz^2),\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2y+xz^2),\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2y+xz^2)\right]=\left[2xy+z^2,\ x^2,\ 2xz\right].$$

Všimněme si, že $J_f(x,y,z)=\operatorname{grad} f(x,y,z)$. Tento fakt vysvětluje, proč se gradientu někdy říká derivace funkce více proměnných. V bodě $A=(3,1,-1)$ dostaneme vektor $J_f(3,1,-1)=[7,\ 9,\ -6]$. ♡

♢ Vypočtěte Jacobiho matici následujících zobrazení $\boldsymbol{f}$ v bodě A.

6.22. **a)** $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2+y^2-4x,\ y-\ln x), \quad A=(4,1)$.

b) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2+y^2-9,\ y-\mathrm{e}^{-x}), \quad A=(0,3)$.

c) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2-9y^2+9,\ y+x^3), \quad A=(1,-1)$.

d) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^3+y^3-3xy,\ y-\sin x), \quad A=(0,1)$.

e) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(yz+2\sqrt{x},\ \frac{x}{z}), \quad A=(1,-3,\frac{1}{2})$.

f) $\boldsymbol{f}(x)=(5\cos x,\ 5\sin x,\ 2x), \quad A=\pi$.

g) $\boldsymbol{f}(x,y)=(\log(xy),\ x^2-y,\ 7y), \quad A=(1,1)$.

6.4 Totální diferenciál, tečná rovina

Totální diferenciál

Totální diferenciál funkce dvou proměnných $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má stejné využití jako diferenciál funkce jedné proměnné. Přírůstek funkce

$$\triangle f(x_0,y_0;\,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=f(x_0+\mathrm{d}x,y_0+\mathrm{d}y)-f(x_0,y_0),$$

kde x se mění z hodnoty x_0 na $x_0 + \mathrm{d}x$ a y z hodnoty y_0 na $y_0 + \mathrm{d}y$, lze aproximovat totálním diferenciálem funkce f v bodě (x_0, y_0)

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0;\, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y\,.$$

6.23. Určeme totální diferenciál funkce $f(x, y) = 2x \sin y$ v obecném bodě $X = (x, y)$ a konkrétním bodě $A = (3, \frac{\pi}{6})$.

Řešení: Nejprve vypočteme první parciální derivace funkce f v bodě X a v bodě A:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x \cos y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 3\sqrt{3}.$$

Totální diferenciál funkce f v bodě X

$$\mathrm{d}f = 2 \sin y\, \mathrm{d}x + 2x \cos y\, \mathrm{d}y$$

je funkce čtyř proměných x, y, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Značíme ho, jak je zvykem, pouze symbolem $\mathrm{d}f$. Aproximuje přírůstek funkce f v bodě X. V bodě $A = (3, \frac{\pi}{6})$ je totální diferenciál

$$\mathrm{d}f(3, \tfrac{\pi}{6}) = 1\,\mathrm{d}x + 3\sqrt{3}\,\mathrm{d}y$$

lineární funkce proměných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Značíme ho zkráceně $\mathrm{d}f(3, \frac{\pi}{6})$. Aproximuje přírůstek funkce f v bodě A. ♡

◇ Napište totální diferenciál následujících funkcí f v obecném bodě $X = (x, y)$ a konkrétním bodě A.

6.24. **a)** $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x}$, $A = (1, 3)$. **b)** $f(x, y) = x^2 + \dfrac{y^4}{4}$, $A = (-2, \sqrt[3]{2})$.

c) $f(x, y) = \dfrac{\arcsin x}{y}$, $A = (0, -1)$. **d)** $f(x, y) = \ln(x + y^2)$, $A = (-3, 2)$.

e) $f(x, y) = y\,\mathrm{e}^{xy}$, $A = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$. **f)** $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$, $A = (-1, -4)$.

6.25. Určeme totální diferenciál a diferenci funkce $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$ v bodě $A = (1, 2)$, změní-li se proměnné x, y o nějaké hodnoty $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ a o konkrétní $\mathrm{d}x = 0,03$ a $\mathrm{d}y = 0,05$. Porovnejme hodnoty totálního diferenciálu a diference.

Řešení: Vypočteme první parciální derivace funkce f v bodě A:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{(x + y)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{2}{9}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{1}{9}\,.$$

Tedy

$$\mathrm{d}f(1, 2) = \frac{2}{9}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{9}\,\mathrm{d}y = \frac{2\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{9}\,.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Nyní určeme diferenci funkce f v bodě A:

$$\triangle f(1,2) = f(1+\mathrm{d}x, 2+\mathrm{d}y) - f(1,2) = \frac{1+\mathrm{d}x}{1+\mathrm{d}x+2+\mathrm{d}y} - \frac{1}{3} = \frac{2\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{3(3+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)}\,.$$

Cílem úlohy je, všimnout si, že $\triangle f \doteq \mathrm{d}f$, je-li změna proměnných x, y malá, tj. $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ je malé. Nyní vypočtěme totální diferenciál a diferenci funkce f v bodě A pro konkrétní hodnoty $\mathrm{d}x = 0,03$ a $\mathrm{d}y = 0,05$ ... x se mění z hodnoty 1 na $1,03$ a y z hodnoty 2 na $2,05$:

$$\mathrm{d}f(1,2) = \frac{2\cdot 0,03 - 0,05}{9} = \frac{0,01}{9} = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1,\bar{1}}{1000} = 0,00\bar{1} \ \ldots \text{ zvládneme zpaměti,}$$

$$\triangle f(1,2) = f(1,03;\, 2,05) - f(1,2) = \frac{2\cdot 0,03 - 0,05}{3(3+0,08)} = \frac{0,01}{9,24} \doteq 0,001082251.$$

Na závěr vypočtěme jejich rozdíl.

$$\triangle f - \mathrm{d}f = \frac{0,01}{9,24} - \frac{0,01}{9} \doteq -0,00002886$$

Tedy nahradíme-li přírůstek funkce totálním diferenciálem, dopustíme se chyby v našem konkrétním případě menší než $3\cdot 10^{-5}$. Aproximace totálním diferenciálem se hlavně používá v praxi, protože jeho výpočet bychom měli zvládnout zpaměti. To vyplývá z faktu, že v konkrétním bodě je totální diferenciál lineární funkce proměných $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. ♡

◇ Porovnejte hodnoty diference a totálního diferenciálu následujících funkcí f v bodě A, změní-li se proměnné x, y o předepsané hodnoty.

6.26. **a)** $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^x$, $A = (0,3)$, $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (-0,1;\, 0,05)$.

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $A = (3,-4)$, $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (-0,02;\, 0,03)$.

c) $f(x,y) = \ln(1+xy)$, $A = (2,1)$, $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (0,3;\, 0,01)$.

d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $A = (1,1)$, $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (0,08;\, 0,05)$.

e) $f(x,y) = \dfrac{\sin y}{x^3}$, $A = (-1, \frac{\pi}{2})$, $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (-0,1;\, 0,1)$.

f) $f(x,y) = x^y$, $A = (\mathrm{e}, 0)$, $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (0,1;\, 0,2)$.

6.27. Pomocí totálního diferenciálu určeme přibližnou hodnotu změny objemu V válce, jestliže se poloměr podstavy $r = 41\,\mathrm{mm}$ zmenší o $1\,\mathrm{mm}$ a výška válce $v = 5,8\,\mathrm{cm}$ se zvětší o $0,2\,\mathrm{cm}$.

Řešení: Objem válce v závislosti na poloměru podstavy a výšce válce je dán funkcí $V(r,v) = \pi r^2 v$. Ze zadání úlohy plyne, že máme vypočítat totální diferenciál funkce V v bodě $(r,v) = (41,58)$ pro $\mathrm{d}r = -1$ a $\mathrm{d}v = 2$ (jednotky jsme sjednotili na milimetry). Hodnoty prvních parciálních derivací funkce V v bodě $(41,58)$ jsou:

$$\frac{\partial V}{\partial r}(41,58) = 2\pi\cdot 41\cdot 58 = 4\,756\,\pi \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial V}{\partial v}(41,58) = \pi\cdot 41^2 = 1\,681\,\pi.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Tedy

$$\begin{aligned}\triangle V &\doteq \mathrm{d}V(41,58) = 4\,756\,\pi\,\mathrm{d}r + 1\,681\,\pi\,\mathrm{d}v = 4\,756\,\pi\,(-1) + 1\,681\,\pi \cdot 2 = -1394\,\pi \doteq \\ &\doteq -4\,379\,\mathrm{mm}^3 \doteq -4,4\,\mathrm{cm}^3.\end{aligned}$$

Objem válce se zmenší přibližně o $4,4\,\mathrm{cm}^3$. Dodejme pro porovnání, že rozdíl v objemu válců je přesně $\triangle V = -1\,498\,\pi \doteq -4\,706\,\mathrm{mm}^3$. ♡

◇ V následujících příkladech použijte k výpočtu totální diferenciál.

6.28. Vypočtěte přibližnou hodnotu změny úhlopříčky u obdélníku, jestliže se strana $a = 0,65\,\mathrm{m}$ zvětší o $1\,\mathrm{cm}$ a strana $b = 1,10\,\mathrm{m}$ se zmenší o $2\,\mathrm{cm}$.

6.29. Velikost středového úhlu kruhové výseče $\alpha = 80°$ je třeba zmenšit o $1°$. Vypočtěte, o kolik je nutné přibližně zvětšit její poloměr $r = 20\,\mathrm{cm}$, aby se plocha výseče nezměnila.

6.30. Vypočtěte přibližnou hodnotu změny objemu V rotačního kužele, jestliže se poloměr podstavy $r = 6,5\,\mathrm{cm}$ zvětší o $0,3\,\mathrm{cm}$ a výška kužele $v = 10\,\mathrm{cm}$ se zmenší o $0,15\,\mathrm{cm}$.

6.31. Zjistěte, o kolik se přibližně změní tlak jednoho molu ideálního plynu, jestliže se objem $V = 0,005\,\mathrm{m}^3$ zmenší o $18\,\mathrm{cm}^3$ a teplota $T = 295\,\mathrm{K}$ vzroste na hodnotu $295,4\,\mathrm{K}$. ($R = 8,314\ \mathrm{Pa\,m^3\,K^{-1}}$.)

Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných

Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě grafu (x_0,y_0,z_0), kde $z_0 = f(x_0,y_0)$, má rovnici

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0). \qquad (*)$$

Je to obecná rovnice roviny tvaru $a(x-x_0) + b(y-y_0) + cz + d = 0$, kde konstanty $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, $c = -1$ a $d = f(x_0,y_0)$. Ačkoliv to na první pohled nevypadá, tak a, b a d jsou čísla. Položíme-li v rovnici $x - x_0 = \mathrm{d}x$ a $y - y_0 = \mathrm{d}y$, pak

$$z - f(x_0,y_0) = \mathrm{d}f(x_0,y_0).$$

V této souvislosti aproximace $\triangle f \doteq \mathrm{d}f$ na okolí bodu (x_0,y_0) odpovídá tomu, že hodnoty funkce $f(x,y)$ aproximujeme hodnotami funkce $z = z(x,y)$ $(*)$, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě (x_0,y_0).

6.32. Určeme rovnici tečné roviny k rotačnímu elipsoidu $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0$ v bodě M této plochy, kde $M = (1,-2,z_0)$, $z_0 > 0$.

Řešení: Pro názornost si lze elipsoid představovat jako povrch ragbyového míče. Tato plocha není grafem funkce dvou proměnných, protože v našem případě na ploše leží např. body $M_1 = (1,-2,4)$ a $M_2 = (1,-2,-4)$, tedy dvojici $(x,y) = (1,-2)$ náleží $z_1 = 4$ a $z_2 = -4$. Protože v zadání úlohy má bod M třetí souřadnici kladnou, budeme uvažovat

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

„horní“ polovinu elipsoidu, ležící v podprostoru $z > 0$, která už je grafem funkce dvou proměnných. Její předpis dostaneme tak, že z rovnice elipsoidu osamostatníme závislou proměnnou z. Tedy

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 36 - 4x^2 - 4y^2 \quad \Longrightarrow \quad |z| = \sqrt{36 - 4x^2 - 4y^2}\,.$$

Protože předpokládáme, že $z > 0$, je $|z| = z$ a funkční předpis má tvar

$$z = f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 4y^2}\,.$$

Nyní určíme rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě grafu $M = (1, -2, z_0)$, kde $z_0 = f(1, -2) = 4$. Dosaďme hodnoty $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = -1$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 2$ do formule

$$z = 4 + \frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) \cdot (x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) \cdot (y + 2) \qquad \Longrightarrow \qquad z = 4 - (x - 1) + 2\,(y + 2)\,.$$

Obecná rovnice tečné roviny k elipsoidu v bodě $(1, -2, 4)$ je $x - 2y + z - 9 = 0$. ♡

◊ Napište rovnice tečných rovin ke grafům následujících funkcí f v bodech grafů M.

6.33. **a)** $f(x, y) = 3x^2y^3$, $M = (2, -1, z_0)$. **b)** $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$, $M = (3, 3, z_0)$.
c) $f(x, y) = \ln(2x + y)$, $M = (-2, 5, z_0)$. **d)** $f(x, y) = x^2 \cos y$, $M = (1, 0, z_0)$.
e) $f(x, y) = \sqrt{y}\,\mathrm{arctg}\, x$, $M = (0, 4, z_0)$. **f)** $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $M = (-3, -9, z_0)$.
g) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 1$, $M = (0, 0, z_0)$. **h)** $f(x, y) = 2^{xy} + y$, $M = (0, -7, z_0)$.

◊ Pojmenujte následující plochy a napište rovnice tečných rovin k těmto plochám v bodech M.

6.34. **a)** $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, $M = (-2, 2, z_0)$, $z_0 > 0$.
b) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 34 = 0$, $M = (1, -1, z_0)$, $z_0 < 0$.
c) $x^2 + y^2 + 4z = 0$, $M = (4, y_0, -8)$, $y_0 < 0$.
d) $2x^2 + y^2 - z = 0$, $M = (x_0, 1, 3)$, $x_0 > 0$.
e) $x^2 + y^2 - 5z^2 - 5 = 0$, $M = (-4, 3, z_0)$, $z_0 < 0$.
f) $9x^2 + y^2 - 4z^2 + 2 = 0$, $M = (1, 5, z_0)$, $z_0 > 0$.
g) $x^2 + y^2 - 13z^2 = 0$, $M = (2, y_0, -1)$, $y_0 > 0$.
h) $x^2 + z^2 - 25 = 0$, $M = (-3, 10, z_0)$, $z_0 > 0$.

6.5 Taylorův polynom

V tomto odstavci budeme funkci $z = f(x, y)$ na okolí bodu (x_0, y_0) nahrazovat polynomem dvou proměnných x a y. Tento polynom nazýváme Taylorovým polynomem funkce f stupně n v bodě (x_0, y_0) a značíme ho $T_n(x, y)$. Jeho tvar pro $n = 1, 2, 3$ je uveden ve skriptech [MII], odstavec 6.5. Zajímavá je souvislost s předchozími pojmy. Při aproximaci $f(x,y) \doteq T_1(x,y)$ na okolí bodu (x_0, y_0), kde

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0),$$

nahrazujeme graf funkce $z = f(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0,z_0), kde $z_0 = f(x_0,y_0)$, tečnou rovinou ke grafu funkce f v tomto bodě. Aproximace $f(x,y) \doteq T_n(x,y)$ je tím lepší, čím vyšší je stupeň Taylorova polynomu a čím je (x,y) blíže (x_0,y_0).

6.35. Vypočtěme přibližnou hodnotu $3\,\mathrm{e}^{0,02}\ln 0,95$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vhodně zvolené funkce ve vhodně zvoleném bodě.

Řešení: Z tvaru daného čísla plyne, že je vhodné volit funkci $f(x,y) = 3\,\mathrm{e}^x\ln y$ a bod $(x_0,y_0) = (0,1)$. Bod (x_0,y_0) jsme zvolili tak, aby byl blízký bodu $(0,02;\,0,95)$ a přitom bylo snadné v tomto bodě vyčíslit parciální derivace. Z formule

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

je patrné, že musíme vypočítat hodnoty parciálních derivací v bodě $(x_0,y_0) = (0,1)$ až do řádu dvě.

$$f(x,y) = 3\,\mathrm{e}^x\ln y \quad\Rightarrow\quad f(0,1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3\,\mathrm{e}^x\ln y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3\,\mathrm{e}^x}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 3\,\mathrm{e}^x\ln y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{3\,\mathrm{e}^x}{y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = -3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{3\,\mathrm{e}^x}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) = 3$$

Tedy

$$T_2(x,y) = 0+0x+3(y-1)+0x^2+3x(y-1)-\frac{3}{2}(y-1)^2 = 3(y-1)+3x(y-1)-\frac{3}{2}(y-1)^2.$$

Protože $f(x,y) \doteq T_2(x,y)$ pro (x,y) blízká $(0,1)$, je

$$3\,\mathrm{e}^{0,02}\ln 0,95 = f(0,02;\,0,95) \doteq T_2(0,02;\,0,95),$$

kde $T_2(0,02;\,0,95) = 3\cdot(-0,05) + 3\cdot 0,02\cdot(-0,05) - \frac{3}{2}\cdot 0,05^2 = -0,156\,75$. Tedy

$$3\,\mathrm{e}^{0,02}\ln 0,95 \doteq -0,156\,75\,.$$ ♡

◊ Vypočtěte přibližnou hodnotu následujících čísel pomocí Taylorova polynomu daného stupně vhodně zvolené funkce ve vhodně zvoleném bodě.

6.36.
a) $\sin 0,08\cdot\sin 0,3\,;\quad n = 2.$
b) $\mathrm{e}^{-0,05}\ln 1,01\,;\quad n = 2.$
c) $1,03^8\,\mathrm{arctg}\,0,1\,;\quad n = 2.$
d) $\mathrm{e}^{0,04}\cos^2 0,02\,;\quad n = 2.$
e) $\ln\sqrt{0,96^2+0,03^2}\,;\quad n = 2.$
f) $1,02^{0,91}\,;\quad n = 2.$
g) $\ln 0,94\cdot\ln 1,05\,;\quad n = 3.$
h) $\mathrm{e}^{0,1}\cos 0,06\,;\quad n = 3.$

6.37. Pro malé hodnoty $|x|, |y|$ určeme aproximaci funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$ polynomem dvou proměnných 3. stupně.

Řešení: V okolí bodu $(x_0, y_0) = (0,0)$ umíme funkci f nahradit Taylorovým polynomem $T_n(x,y)$, který je konstruován tak, že v bodě (x_0, y_0) má stejnou funkční hodnotu jako funkce f i stejné hodnoty všech parciálních derivací až do řádu n. Vypočtěme hodnoty parciálních derivací v bodě $(0,0)$ až do řádu tři.

$f(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$	$f(0,0) = 1$	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(1-x)^2(1-y)}$	$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)^2}$	$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{(1-x)^3(1-y)}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{(1-x)(1-y)^3}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{(1-x)^2(1-y)^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{6}{(1-x)^4(1-y)}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 6$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{2}{(1-x)^3(1-y)^2}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 2$
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = \frac{6}{(1-x)(1-y)^4}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 6$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{2}{(1-x)^2(1-y)^3}$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 2$

Dosaďme vypočtené hodnoty do formule

$$
\begin{aligned}
T_3(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \\
&+ \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)(y-y_0)^3.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$T_3(x,y) = 1 + x + y + \frac{2}{2}x^2 + xy + \frac{2}{2}y^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{2}{2}x^2 y + \frac{2}{2}xy^2 + \frac{6}{3!}y^3.$$

Aproximace funkce f Taylorovým polynomem T_3 na okolí bodu $(0,0)$ je

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} \doteq 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3. \qquad \heartsuit$$

$\diamondsuit$ Pro malé hodnoty $|x|, |y|$ určete aproximaci následujících funkcí Taylorovým polynomem daného stupně.

6.38. **a)** $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{1+\sin y}$, $\quad n = 2.$ **b)** $f(x,y) = 4 \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+y}$, $\quad n = 2.$

c) $f(x,y) = \operatorname{tg}(2x+3y)$, $\quad n = 2.$ **d)** $f(x,y) = 6 \sin x \cos y$, $\quad n = 3.$

e) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$, $\quad n = 3.$ **f)** $f(x,y) = \sqrt[3]{8 + x^2 + y^2}$, $\quad n = 2.$

g) $f(x,y) = 6\,\mathrm{e}^{-x} \ln(1+y)$, $\quad n = 3.$ **h)** $f(x,y) = \frac{8}{\sqrt{1-x+y}}$, $\quad n = 2.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

6.6 Newtonova metoda řešení soustav nelineárních rovnic

V tomto odstavci přibližně řešíme soustavu dvou nelinárních rovnic o dvou neznámých x a y

$$f_1(x,y) = 0,$$

$$f_2(x,y) = 0,$$

kde f_1, f_2 jsou zadané funkce třídy $C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, Newtonovou metodou. Postup výpočtu přibližného řešení soustavy je tento:

- Graficky zjistíme (pokud to lze), zda existuje řešení soustavy.
- Určíme počáteční aproximaci (x_0, y_0) řešení.
- Další aproximace řešení počítáme Newtonovou metodou. Nejdříve řešíme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_k,y_k) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_k,y_k) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_k,y_k) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_k,y_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_k,y_k) \\ f_2(x_k,y_k) \end{bmatrix}$$

  vzhledem k neznámým Δx_k, Δy_k. Hodnoty další iterace jsou pak dány vztahy

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \qquad y_{k+1} = y_k + \Delta y_k.$$

  Vektorově lze soustavu zapsat ve tvaru

$$J(x_k,y_k) \cdot \boldsymbol{\Delta}_k = -\boldsymbol{f}(x_k,y_k),$$

  kde $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^\top$, $\boldsymbol{\Delta}_k = (\Delta x_k, \Delta y_k)^\top$ a $J(x_k,y_k)$ je Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{f}$ v bodě (x_k,y_k). Aproximace řešení můžeme počítat podle ekvivalentního vzorce

$$X_{k+1} = X_k - J^{-1}(x_k,y_k) \cdot \boldsymbol{f}(x_k,y_k),$$

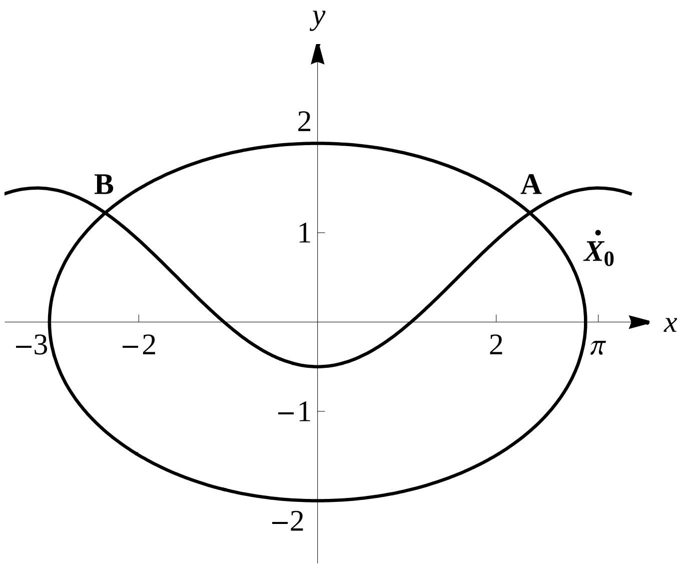
  kde $X_k = (x_k,y_k)^\top$, $X_{k+1} = (x_{k+1},y_{k+1})^\top$ a $J^{-1}(x_k,y_k)$ je inverzní matice k Jacobiho matici $J(x_k,y_k)$.
- Proces výpočtu aproximací se ukončuje tehdy, když je norma rozdílu dvou po sobě jdoucích aproximací $\|\boldsymbol{\Delta}_k\| = |\Delta x_k| + |\Delta y_k|$ menší než je předem zadaná tolerance.

6.39. Určeme kolik řešení má soustava

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$y + \cos x = \frac{1}{2}.$$

Newtonovou metodou vypočtěme první aproximaci řešení, které leží v I. kvadrantu. Za počáteční aproximaci zvolme $(x_0,y_0) = (\pi, 1)$.



Obr. 6.1

Řešení: Úlohu můžeme interpretovat geometricky. První rovnice je rovnicí elipsy a druhá rovnice popisuje graf funkce $y = \frac{1}{2} - \cos x$. Z grafického znázornění (viz obr. 6.1) je zřejmé, že daná soustava má dvě řešení, jimž odpovídají dva průsečíky A, B příslušných křivek. Průsečíky leží v I. a II. kvadrantu a jsou symetrické podle osy y. Povšimněme si, že hledáme-li přibližné řešení v I. kvadrantu, je aproximace $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ vhodně zvolená. Bod $X_0 = (x_0, y_0)$ je „blízko“ průsečíku A. Danou soustavu musíme nejprve upravit tak, aby vpravo byly nuly

$$4\,x^2 + 9\,y^2 - 36 = 0,$$

$$y + \cos x - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Určíme Jacobiho matici zobrazení $\boldsymbol{f}(x,y) = (4\,x^2 + 9\,y^2 - 36,\ y + \cos x - \frac{1}{2})^\top$ v bodě (x,y)

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 8\,x & 18\,y \\ -\sin x & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro počáteční aproximaci (x_0, y_0) dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} 8\,x_0 & 18\,y_0 \\ -\sin x_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4\,x_0^2 + 9\,y_0^2 - 36 \\ y_0 + \cos\,x_0 - \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

kterou řešíme vzhledem k neznámým Δx_0 a Δy_0. Dosaďme $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$. Tedy

$$\begin{bmatrix} 8\,\pi & 18 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 - 4\,\pi^2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a

$$(\Delta x_0,\ \Delta y_0) = \left(\frac{9 - 2\,\pi^2}{4\pi},\ \frac{1}{2} \right).$$

První aproximace řešení dané soustavy, tj. bodu A, je

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + (\Delta x_0, \Delta y_0) = \left(\pi + \frac{9 - 2\,\pi^2}{4\pi}\,,\ 1 + \frac{1}{2}\right) \doteq (2,28699\,;\,1,5).$$

Pokud bychom chtěli vypočítat další aproximaci tohoto řešení, celý výpočet bychom opakovali v bodě (x_1, y_1). Získali bychom vektor $(\Delta x_1, \Delta y_1) = (0,10611\,;\,-0,26344)$ a následně další aproximaci řešení $(x_2, y_2) = (2,39311;\,1,23656)$. ♡

6.40. Newtonovou metodou řešme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ 2x^2 - 2y^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Zvolme počáteční aproximaci řešení $(x_0, y_0) = (1, 2)$ a vypočtěme dvě další aproximace. Pro každou aproximaci zároveň vypočtěme normu $\|\boldsymbol{\Delta}_k\| = |\Delta x_k| + |\Delta y_k|$.

Řešení: Upravíme soustavu do tvaru:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0, \\ x^2 - y^2 + \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Pro výpočet aproximací kořene soustavy nyní použijeme inverzní matici J^{-1}. Určíme Jacobiho matici zobrazení $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2 + y^2 - 1,\ x^2 - y^2 + \frac{1}{2})^\top$ v bodě (x, y)

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}.$$

Předpokládejme, že v bodě (x, y) existuje inverzní matice $J^{-1}(x, y)$. Pomocí algebraických doplňků vypočteme $J^{-1}(x, y)$

$$J^{-1}(x,y) = \frac{1}{-8xy} \begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -2y & 2x \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4xy} \begin{bmatrix} y & y \\ x & -x \end{bmatrix}.$$

Explicitní vztah pro výpočet dalších iterací $X_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})^\top, k = 0, 1, \ldots$ je

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \frac{1}{4x_k y_k} \begin{bmatrix} y_k & y_k \\ x_k & -x_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 1 \\ x_k^2 - y_k^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{kde} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Tedy první aproximace X_1 kořene soustavy je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{19}{16} \end{bmatrix},$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$$\boldsymbol{\Delta}_0 = \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ -\frac{13}{16} \end{bmatrix}.$$

Obdobně druhá aproximace X_2 je

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{19}{16} \end{bmatrix} - \frac{32}{95} \begin{bmatrix} \frac{19}{16} & \frac{19}{16} \\ \frac{5}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{205}{96} \\ -\frac{133}{256} \end{bmatrix}, \quad \text{odtud} \quad (x_2, y_2) \doteq (0,5125;\, 0,90954),$$

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} -0,11250 \\ -0,27796 \end{bmatrix}.$$

Obdržené výsledky v desetinném tvaru zapíšeme do následující tabulky, kde E_k značí normu $\|\boldsymbol{\Delta}_{k-1}\| = |\Delta x_{k-1}| + |\Delta y_{k-1}|$ pro k-tou aproximaci.

k	x_k	y_k	E_k
0	1	2	
1	0,62500	1,18750	1,18750
2	0,51250	0,90954	0,39046

Poznamenejme, že danou soustavu nelineárních rovnic nebylo třeba řešit numericky, neboť ji lze jednoduše vyřešit např. pomocí součtu obou rovnic. Kořeny soustavy jsou $\pm\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ a $\pm\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$. Z tabulky je vidět, že aproximace vypočtené Newtonovou metodou budou pravděpodobně konvergovat ke kořenu $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) \doteq (0,5\,;\, 0,86603)$. ♡

◇ V následujících příkladech určete z grafického znázornění počet řešení soustavy. Vypočtěte první aproximaci jednoho z řešení soustavy Newtonovou metodou. Pro výpočet aproximací kořene použijte zadanou počáteční aproximaci X_0.

6.41. **a)** $x^2 - 4y - 4 = 0,$
$x^3 - y = 2,$
$X_0 = (1,0)\,.$

b) $x^2 - y = 0,2\,;$
$y^2 - x = 0,3\,;$
$X_0 = (1\,,\,1)\,.$

c) $x^2 + y^2 - 4 = 0,$
$y + \ln x = 0,$
$X_0 = (2\,,-1)\,.$

d) $x^2 + y^2 = 9,$
$x^2 - 10x + (y-5)^2 = 4,$
$X_0 = (5,0)\,.$

e) $x^2 + y^2 - 2x = 0,$
$y - \mathrm{e}^{-x^2} = 0,$
$X_0 = (1\,;\,0,8)\,.$

f) $x^2 - y^2 - 6x + 8 = 0,$
$x^2 + 9y^2 - 6x - 18y + 9 = 0,$
$X_0 = (4,2)\,.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ V následujících příkladech vypočtěte Newtonovou metodou první dvě aproximace řešení soustavy a normu rozdílu dvou po sobě jdoucích aproximací. Použijte zadanou počáteční aproximaci X_0.

6.42. **a)**
$$x^2 + 2y^3 = 13,\quad 2x^3 + y^4 = 19,\quad X_0 = (1, 1)\,.$$

b)
$$x\,y^2 + 1 = 0,\quad 2\,x - y^2 + 4 = 0,\quad X_0 = (\,0,\,2)\,.$$

c)
$$x^2 - y^2 = 1,\quad x^2 = y^3,\quad X_0 = (2\,,\,2)\,.$$

d)
$$2\,x^2 - x\,y - 5\,x + 1 = 0,\quad x + 3\,\ln x - y^2 = 0,\quad X_0 = (1, -1)\,.$$

7 Extrémy funkcí dvou proměnných

7.1 Lokální extrémy

Předpokládáme, že je zadána reálná funkce f dvou proměnných a bod $X_0 \in \mathcal{D}(f)$. Existuje-li takové prstencové okolí $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{D}(f)$ bodu X_0, že pro každé $X \in \mathcal{P}(X_0)$ platí

$$f(X) < f(X_0) \text{ (resp. } f(X) > f(X_0)),$$

říkáme, že funkce f má v bodě X_0 **ostré lokální maximum (minimum)**, zkráceně lok. max. (min.).
V této kapitole budeme hledat pouze ostré lokální extrémy funkcí z C^2. V některých (jednodušších) příkladech stačí vyšetřovat lokální extrém přímo z definice. Z definice také dokazujeme existenci extrémů v bodech, kde $f \notin C^1$. Obecný postup pro zjišťování lokálních extrémů funkce je tento:

- Nalezneme $\mathcal{D}(f)$.
- Vypočítáme stacionární body X, tj. body, které jsou řešením soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0\,.$$

- U každého stacionárního bodu $X_0 \in \mathcal{D}(f)$ provedeme vyhodnocení, zda se jedná o lokální extrém a pokud ano, kterého je druhu (věta 7.7 [MII]).
  Nechť $H_f(X_0)$ značí Hessián funkce f v X_0.

  1. $H_f(X_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ funkce f má v bodě X_0 lokální extrém.
     (a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ má v bodě X_0 lok. min.
     (b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ má v bodě X_0 lok. max.
  2. $H_f(X_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ má v bodě X_0 **sedlový** bod, tj. lokální extrém v X_0 nemá.

- Pokud stacionární bod nesplňuje ani jednu z předchozích podmínek, tj. $H_f(X_0) = 0$, potom je nutno analyzovat chování funkce v bodě jiným způsobem, např. dokázat existenci extrému (sedla) z definice.

7.1. Ukažme pomocí definice, že funkce $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 8$ má v bodě $[3, 1]$ lokální minimum.

Řešení: Daný bod zřejmě patří do $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Dokážeme, že hodnota $f(3, 1) = -4$ je minimální funkční hodnotou ze všech hodnot funkce v bodech $[x, y]$ z nějakého okolí $\mathcal{O}([3, 1])$. Požadovanou nerovnost ukážeme snadno pomocí tzv. doplnění na čtverec

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 8 = (x - 3)^2 + 3(y - 1)^2 - 4 > -4 \text{ dokonce pro } \forall\, [x, y] \neq [3, 1].$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Funkce f má tedy v bodě $[3,1]$ lokální minimum $f(3,1) = -4$, které je zároveň globálním minimem funkce. ♡

◇ V následujících příkladech ověřte pomocí definice, že funkce f má v bodě X_0 extrém. Určete jeho druh.

7.2. **a)** $f(x,y) = 2x^2 + 4x + y^2 - 6y + 11\,,\ X_0 = [-1\,,\,3]$.

b) $f(x,y) = \dfrac{3}{(x-1)^2 + y^2 + 2}\,,\ X_0 = [1\,,\,0]$.

c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2+2y}\,,\ X_0 = [\,0,1]$.

d) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\,,\ X_0 = [\,0,0]$.

7.3. Najděme lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 + x^2y + 2y^3\,.$$

Řešení: Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Vyjádříme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2xy = 2x(1+y)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10y + x^2 + 6y^2\,.$$

Souřadnice stacionárních bodů řeší soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x(1+y) &= 0 \\ 10y + x^2 + 6y^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne $x = 0$ nebo $y = -1$. Dosadíme $x = 0$ do druhé rovnice:

$$10y + 6y^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ (\,y = 0 \ \text{nebo}\ y = -\tfrac{5}{3}\,)\,.$$

Podobně pro $y = -1$ dostáváme: $-10 + x^2 + 6 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \pm 2$.
Získali jsme tedy celkem čtyři stacionární body funkce f: $A_1 = [0,0]$, $A_2 = [0,-\frac{5}{3}]$, $A_3 = [2,-1]$, $A_4 = [-2,-1]$.
Pomocí determinantu Hessovy matice, tzv. Hessiánu,

$$H_f(x,y) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2(1+y) & 2x \\ 2x & 2(5+6y) \end{bmatrix}$$

zkusíme rozhodnout, zda jsou v jednotlivých bodech $A_1 - A_4$ lokální extrémy nebo sedlové body.

$$H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 20 > 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lok. min. v } A_1\,.$$

$$H_f(A_2) = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = \tfrac{40}{3} > 0\,, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-\tfrac{5}{3}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lok. max. v } A_2\,.$$

$$H_f(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{v } A_3 \text{ je sedlový bod.}$$

$$H_f(A_4) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{v } A_4 \text{ je sedlový bod.}$$

Tedy funkce f nabývá v $\mathbb{R}^2$ dvou lokálních extrémů; v bodě $A_1 = [0,0]$ lokálního minima $f(A_1) = 0$ a v bodě $A_2 = [0, -\frac{5}{3}]$ lokálního maxima $f(A_2) = \frac{125}{27}$. Dále má funkce v $A_{3,4} = [\pm 2, -1]$ dva sedlové body.
Poznamenejme, že funkce f je neomezená shora i zdola, neboť např. na ose y nabývá $f(0,y) = 5y^2 + 2y^3$ libovolně velkých i malých hodnot. ♡

7.4. Zjistěme, zda má funkce $f(x,y) = (x+1)^4 + (x+1)^2 + y^4 + 2$ v bodě $[-1,0]$ lokální extrém.

Řešení: Zřejmě $[-1,0] \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. V daném bodě jsou parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x+1)^3 + 2(x+1)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3$$

nulové, jedná se tedy o stacionární bod. Nyní se pokusíme ověřit postačující podmínku pro lokální extrém funkce. Hessián je roven

$$H_f(x,y) = \det \begin{bmatrix} 2 + 12(x+1)^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

Tedy $H_f(-1,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ a nelze použít věty 7.7 z [MII] pro určení, zda se v bodě nachází lokální extrém funkce nebo zda se jedná o sedlový bod.
Pomocí definice snadno dokážeme, že funkce f má v bodě $[-1,0]$ globální, tedy i lokální minimum. Vypočteme $f(-1,0) = 2$. Zřejmě platí:

$$f(x,y) = (x+1)^4 + (x+1)^2 + y^4 + 2 > 2 \quad \text{pro } \forall\,[x,y] \neq [-1,0]\,. \qquad ♡$$

♢ Nalezněte všechny stacionární body funkce.

7.5. **a)** $f(x,y) = x\,y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. **b)** $f(x,y) = 3\ln x + xy^2 - y^3$.

c) $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$.

$\diamondsuit$ V následujících příkladech nalezněte lokální extrémy a sedlové body daných funkcí.

7.6. **a)** $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x\,.$

b) $f(x,y) = \ln^2 y - x^2\,.$

c) $f(x,y) = \dfrac{40}{x} + y + \dfrac{xy}{50}\,.$

d) $f(x,y) = x\ln(x^2 + y)\,.$

e) $f(x,y) = \dfrac{x}{xy + y^2}\,.$

f) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20\,.$

g) $f(x,y) = xy\,(4 - x - y)\,.$

h) $f(x,y) = 100\,(y - x^2)^2 + (1 - x)^2\,.$

i) $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{x^2 - y^2}\,.$

j) $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2\,.$

k) $f(x,y) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{xy}{10}\,.$

l) $f(x,y) = x\ln(x + y^2)\,.$

m) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2\,.$

n) $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}\,.$

o) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y\,.$

7.7. Určeme nejkratší vzdálenost z bodu $A = [5,4,0]$ ke kuželové ploše $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$

Řešení: Minimalizujeme vzdálenost bodu A od bodů $[x,y,z]$ ležících na kuželové ploše, tj. hodnotu $\rho(x,y,z) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2}\,,$ kde $z^2 = x^2 + y^2$ a navíc $z \geq 0\,.$ Zřejmě bod, kde se nachází minimum funkce ρ, je stejný jako bod, který je minimem funkce ρ^2. Dosadíme-li dále za z^2 do ρ^2, redukuje se původní úloha na nalezení minima funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = (x-5)^2 + (y-4)^2 + x^2 + y^2.$$

Položíme-li parciální derivace rovny nule, dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} 4x - 10 &= 0 \\ 4y - 8 &= 0\,. \end{aligned}$$

Stacionární bod funkce f je $\left[\frac{5}{2}, 2\right]$. Z geometrické představy víme, že minimum existuje. Jelikož se navíc jedná o jediný stacionární bod, nemusíme dále počítat Hessián.

Hledaná nejkratší vzdálenost je $\sqrt{f\left(\frac{5}{2}, 2\right)} = \frac{\sqrt{82}}{2}$. Dopočítáme navíc zbylou souřadnici $z = \frac{\sqrt{41}}{2}$ bodu na kuželové ploše. Pata nejkratší spojnice z bodu A ke kuželi je tedy $P = [\,\frac{5}{2}, 2, \frac{\sqrt{41}}{2}\,]$.

◇ Řešte aplikační úlohy.

7.8. Určete bod P v rovině $x+y+3z = 5$, který má nejmenší vzdálenost od počátku souřadnic. Řešte jako minimalizační úlohu i geometricky.

7.9. Nalezněte rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu o objemu 32 m^3, aby pro dno a stěny nádrže bylo třeba co nejméně obkladového materiálu.

7.10. Obchodník má v sortimentu pouze dva druhy vín: bílé a červené. Láhev bílého vína nakupuje od vinaře po 40 Kč, červeného po 60 Kč. Obchodník odhaduje, že pokud bude prodávat láhev bílého vína za x Kč a červeného za y Kč, pak měsíčně prodá $80 - 7x + 6y$ lahví bílého vína a $140 + 4x - 5y$ lahví červeného (tj. jsou známy tzv. účelové funkce).
Jaké by měl obchodník stanovit ceny x a y, aby jeho zisk z měsíčního prodeje byl maximální? Jaký bude tento maximální zisk?

7.11. Určete rozměry bedny o největším možném objemu, víme-li, že součet délek všech hran bedny je roven číslu L.

7.2 Metoda nejmenších čtverců

7.12. V tabulce jsou dány hodnoty $x_i,\ y_i,\ i = 1, ..., 5$,

x	-7	0	7	14	21
y	60	50	30	20	15

.

Aproximujme závislost y na x lineární funkcí $y = ax + b$. Koeficienty a, b vypočítejme metodou nejmenších čtverců.

Řešení: Určujeme-li koeficienty a, b metodou nejmenších čtverců, vycházíme z požadavku, aby hodnota funkce $f(a, b) = \sum_{i=1}^{5}(ax_i + b - y_i)^2$ byla minimální pro hledanou dvojici (a, b). Z podmínek na stacionární bod funkce f plynou vzorce

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) a \;+\; \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) b \;=\; \sum_{i=1}^{5} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) a \;+\; \left(\sum_{i=1}^{5} 1\right) b \;=\; \sum_{i=1}^{5} y_i \,,$$

což je soustava dvou lineárních rovnic pro neznámé a, b. Koeficienty a pravé strany této soustavy vypočteme ze zadaných hodnot x_i a y_i.

Tedy $\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2 = 735$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 35$, $\sum_{i=1}^{5} 1 = 5$, $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 385$ a $\sum_{i=1}^{5} y_i = 175$.

Dá se dokázat, že ve stacionárním bodě, který je jediným řešením této soustavy, je splněna také postačující podmínka věty 7.7 z [MII] pro existenci minima funkce f.
Soustavu rovnic zjednodušíme

$$\begin{array}{rcrcl} 735\,a & + & 35\,b & = & 385 \\ 35\,a & + & 5\,b & = & 175 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 21\,a & + & b & = & 11 \\ 7\,a & + & b & = & 35 \end{array} .$$

Odtud ihned dostáváme $a = -\frac{12}{7} \doteq -1,714$, $b = 47$. Tedy lineární funkce, kterou aproximujeme závislost y na x, má tvar $y = -1,714\,x + 47$. ♡

♢ V následujících příkladech určete aproximující lineární funkci metodou nejmenších čtverců, jsou-li k dispozici tabelovaná data.

7.13. **a)**

x	0	1	1	4
y	3	2	1	0

b)

x	-1	0	1	2	3
y	3	3	1	0	0

c)

x	1	2	3	4	5
y	-0,1	0,3	0,25	0,5	1,2

d)

x	-1	1	2	2	3	4
y	0,5	0,6	0,25	0,5	1	2

8 Implicitně zadané funkce

V této kapitole je funkce jedné a dvou proměnných zadána pomocí rovnice. Detailně je problém rozebrán ve skriptech [MII], kapitola 8.

8.1 Implicitní funkce jedné proměnné

Předpokládejme, že $F \in C^k(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$ a že pro $(x_0, y_0) \in G$ platí

$$1) \quad F(x_0, y_0) = 0,$$

$$2) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci jedné proměnné $y = f(x)$, tj. existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje právě jedno $y = f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, které splňuje rovnici $F(x, y) = 0$. Navíc $f \in C^k(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

První podmínka říká, že bod (x_0, y_0) leží na křivce dané rovnicí $F(x, y) = 0$, tedy $y_0 = f(x_0)$. Geometrická interpretace věty o existenci implicitní funkce je následující: jsou-li splněny předchozí dvě podmínky, existuje okolí bodu (x_0, y_0), kde křivka daná rovnicí $F(x, y) = 0$ je grafem funkce jedné proměnné x.

8.1. Rozhodněme podle věty o existenci implicitní funkce, zda na okolí bodu (x_0, y_0) je rovnicí $y^2 - \pi\, y + \sin y + x^2 - 1 = 0$ implicitně definovaná funkce proměnné x.

a) $(x_0, y_0) = (1, 0)$ **b)** $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Řešení:

a) Levá strana rovnice je funkce $F(x, y)$, tj. $F(x, y) = y^2 - \pi\, y + \sin y + x^2 - 1$ a zřejmě $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Přesvědčme se, zda funkce $F(x, y)$ v bodě $(1, 0)$ splňuje dvě podmínky:

1. $F(1, 0) = 0 - 0 + 0 + 1 - 1 = 0$,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y - \pi + \cos y \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0 - \pi + 1 \neq 0.$

Podmínky jsou splněny, proto na okolí bodu $(1, 0)$ je danou rovnicí implicitně definovaná nějaká funkce jedné proměnné $y = f(x)$, pro kterou $f(1) = 0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro x z jistého okolí bodu $x_0 = 1$.

b) Přesvědčme se, zda funkce $F(x, y)$ v bodě $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ splňuje dvě podmínky:

1. $F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi^2}{4} - 1 = 0$,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \pi - \pi + 0 = 0.$

Druhá podmínka není splněna. Věta o existenci implicitní funkce nedává odpověď, zda daná rovnice na okolí bodu $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nějakou implicitně zadanou funkci jedné proměnné x definuje či nedefinuje. ♡

8.2. Rozhodněme, zda na okolí bodu $(0,2)$ je rovnicí $y\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{y-2} + x - 1 = 0$ implicitně definovaná funkce jedné proměnné x, resp. y.

Řešení: Levá strana rovnice je funkce $F(x,y)$, tj. $F(x,y) = y\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{y-2} + x - 1$ a zřejmě $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Podle věty o existenci implicitní funkce ověřme dvě podmínky:

1. $F(0,2) = 2 - 1 + 0 - 1 = 0$,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{y-2} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 1 - 1 = 0.$

Druhá podmínka není splněna. Nevíme, zda daná rovnice na okolí bodu $(0,2)$ nějakou implicitně zadanou funkci proměnné x definuje. Ve větě o existenci implicitní funkce lze zaměnit role x a y. Vypočtěme parciální derivaci funkce F podle x v bodě $(0,2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y\,\mathrm{e}^x + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,2) = 2 + 1 \neq 0.$$

Daná rovnice definuje na okolí bodu $(0,2)$ implicitně nějakou funkci jedné proměnné y, $x = g(y)$, pro kterou $g(2) = 0$ a $F(g(y), y) = 0$ pro y z jistého okolí bodu $y_0 = 2$. ♡

◇ Rozhodněte podle věty o existenci implicitní funkce, zda na okolí bodu A je následujícími rovnicemi implicitně definovaná funkce jedné proměnné $y = f(x)$, resp. $x = g(y)$.

8.3. **a)** $xy - \ln y + x^3 = 0,\ A = (0,1)$. **b)** $xy(x+1) - \cos y + 1 = 0,\ A = (1,0)$.
c) $y - \mathrm{e}^{xy} + x = 0,\ A = (1,0)$. **d)** $x \ln y + y \ln(x-2) = 0,\ A = (3,1)$.
e) $3xy^3 - yx^3 - 2 = 0,\ A = (1,1)$. **f)** $x \cos y + y \sin x - x = 0,\ A = (0,0)$.
g) $y^2 - \sin y + x = 0,\ A = (0,-1)$. **h)** $3\ln x - y^4 - 4yx^2 - 3 = 0,\ A = (1,-1)$.

8.4. Rovnice $y^2 - \pi\, y + \sin y + x^2 - 1 = 0$ na jistém okolí bodu $(1,0)$ implicitně definuje funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Vypočtěme $f'(1)$, $f''(1)$.

Řešení: Funkce $F(x,y) = y^2 - \pi\, y + \sin y + x^2 - 1$ je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, proto $f \in C^\infty(1-\delta, 1+\delta)$ pro jisté $\delta > 0$ (má spojité derivace všech řádů). První derivaci funkce f vypočteme podle vzorce

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \qquad x \in (1-\delta, 1+\delta)\,.$$

Zdůrazněme, že známe jedinou funkční hodnotu implicitně zadané funkce $f(1) = 0$, proto může určit její derivaci jen v bodě $x = 1$. Vypočtěme první parciální derivace funkce F v bodě $(1,0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y - \pi + \cos y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 1 - \pi$$

Derivace funkce f v bodě $x_0 = 1$ je

$$f'(1) = -\frac{2}{1-\pi} = \frac{2}{\pi - 1}\,.$$

Na okolí bodu $x_0 = 1$ je funkce f' podle předchozího vzorce dána analyticky výrazem

$$f'(x) = -\frac{2x}{2f(x) - \pi + \cos f(x)}\,, \quad x \in (1-\delta, 1+\delta).$$

Protože však neznáme explicitně funkci $f(x)$ pro $x \neq 1$, nemůže tuto derivaci vyčíslit. Druhou derivaci funkce f získáme derivováním funkce $f'(x)$ podle pravidla pro derivaci podílu funkcí.

$$f''(x) = -\frac{2\,[2f(x) - \pi + \cos f(x)] - 2x[2f'(x) - \sin f(x)\cdot f'(x)]}{[2f(x) - \pi + \cos f(x)]^2}$$

Dosaďme hodnotu $x = 1$. Víme, že $f(1) = 0$ a $f'(1) = \frac{2}{\pi-1}$. Druhá derivace funkce f v bodě $x_0 = 1$ je

$$f''(1) = -\frac{2\,(-\pi+1) - 2\left(\frac{4}{\pi-1} - 0\right)}{(-\pi+1)^2} = \frac{2\,(\pi-1)^2 + 8}{(\pi-1)^3}\,. \qquad \heartsuit$$

8.5. Rovnice $y\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{y-2} + x - 1 = 0$ na jistém okolí bodu $(0,2)$ implicitně definuje funkci jedné proměnné $x = g(y)$. Vypočtěme $g'(2), g''(2)$.

Řešení: Funkce $F(x,y) = y\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{y-2} + x - 1$ je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, proto $g \in C^\infty(2-\delta, 2+\delta)$ pro jisté $\delta > 0$. Pro $y \in (2-\delta, 2+\delta)$ platí $F(g(y), y) = 0$. Tedy

$$y\mathrm{e}^{g(y)} - \mathrm{e}^{y-2} + g(y) - 1 = 0\,.$$

Pokud si nepamatujeme vzorec pro první derivaci funkce g, můžeme ji získat „derivováním rovnice“ $F(g(y), y) = 0$. Levá a pravá strana rovnice jsou funkce jedné proměnné y. Jestliže se pro každé $y \in (2-\delta, 2+\delta)$ rovnají, rovnají se také jejich derivace. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[y\mathrm{e}^{g(y)} - \mathrm{e}^{y-2} + g(y) - 1\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(0) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{g(y)} + y\mathrm{e}^{g(y)}\cdot g'(y) - \mathrm{e}^{y-2} + g'(y) = 0$$

Dosaďme hodnoty $y = 2$, $g(2) = 0$. Dostáváme

$$1 + 2g'(2) - 1 + g'(2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g'(2) = 0\,.$$

Druhou derivaci funkce g získáme opakovaným „derivováním rovnice“:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\mathrm{e}^{g(y)} + y\mathrm{e}^{g(y)}\cdot g'(y) - \mathrm{e}^{y-2} + g'(y)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{e}^{g(y)}\cdot g'(y) + [\mathrm{e}^{g(y)} + y\mathrm{e}^{g(y)}\cdot g'(y)]g'(y) + y\mathrm{e}^{g(y)}\cdot g''(y) - \mathrm{e}^{y-2} + g''(y) = 0\,.$$

Dosaďme hodnoty $y = 2$, $g(2) = 0$, $g'(2) = 0$. Dostáváme

$$0 + (1+0)\cdot 0 + 2g''(2) - 1 + g''(2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g''(2) = \frac{1}{3}\,. \qquad \heartsuit$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ Pro funkce $y = f(x)$, které jsou zadané na jistém okolí bodu (x_0, y_0) implicitně následujícími rovnicemi (ověřte), určete funkční hodnotu v bodě x_0 a v tomto bodě vypočtěte první a druhou derivaci.

8.6. **a)** $y^2 + x - 3 + \sin(xy) = 0,\ (x_0, y_0) = (3, 0)$.
b) $(x + y)^3 - x^2 + y + 2 = 0,\ (x_0, y_0) = (-2, 2)$.
c) $x + 1 - 2y + \ln \frac{y}{x} = 0,\ (x_0, y_0) = (1, 1)$.
d) $\mathrm{e}^{x+y} + x + 2y = 0,\ (x_0, y_0) = (1, -1)$.

$\diamondsuit$ Pro funkce $x = g(y)$, které jsou zadané na jistém okolí bodu (x_0, y_0) implicitně následujícími rovnicemi (ověřte), určete funkční hodnotu v bodě y_0 a v tomto bodě vypočtěte první a druhou derivaci.

8.7. **a)** $x - y + \mathrm{e}^{xy} = 0,\ (x_0, y_0) = (0, 1)$.
b) $x + y - 2 + \ln(x + y - 1) = 0,\ (x_0, y_0) = (2, 0)$.

Vlastnosti implicitně zadané funkce $y = f(x)$

8.8. Rovnice $\ln(x + y + 1) + \frac{3}{x} + y + 2 = 0$ na jistém okolí bodu $(-1, 1)$ implicitně definuje funkci f jedné proměnné x. Vyšetřeme na okolí bodu $x_0 = -1$ průběh funkce f pomocí její první a druhé derivace v bodě x_0. Napišme rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě grafu $(-1, 1)$. Graf funkce f včetně tečny nakreslete do obrázku.

Řešení: Levá strana dané rovnice $F(x, y) = \ln(x + y + 1) + \frac{3}{x} + y + 2$ je třídy $C^\infty(G)$, kde $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0\ \wedge\ x + y > -1\}$, proto $f \in C^\infty(-1 - \delta, -1 + \delta)$ pro jisté $\delta > 0$. Pro $x \in (-1 - \delta, -1 + \delta)$ platí

$$\ln(x + f(x) + 1) + \frac{3}{x} + f(x) + 2 = 0\,.$$

Postupným „derivováním rovnice“ získáme první a druhou derivaci funkce f.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln(x + f(x) + 1) + \frac{3}{x} + f(x) + 2\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(0) \quad\Longrightarrow\quad \frac{1 + f'(x)}{x + f(x) + 1} - \frac{3}{x^2} + f'(x) = 0$$

Dosaďme hodnoty $x = -1$, $f(-1) = 1$. Dostáváme

$$\frac{1 + f'(-1)}{-1 + 1 + 1} - 3 + f'(-1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad f'(-1) = 1\,.$$

Protože $f'(-1) > 0$ a f' je spojitá, je funkce f na okolí bodu $x_0 = -1$ rostoucí. Vypočtěme druhou derivaci funkce f.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1 + f'(x)}{x + f(x) + 1} - \frac{3}{x^2} + f'(x)\right] = 0 \;\Rightarrow\; \frac{f''(x)}{x + f(x) + 1} - \frac{[1 + f'(x)]^2}{[x + f(x) + 1]^2} + \frac{6}{x^3} + f''(x) = 0$$

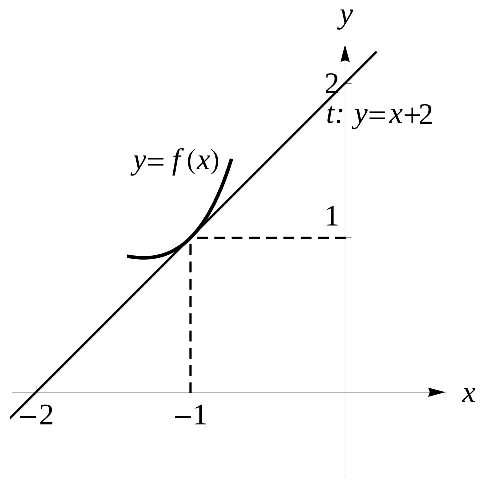
Dosaďme hodnoty $x = -1$, $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 1$. Dostáváme

$$f''(-1) - 4 - 6 + f''(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f''(-1) = 5\,.$$

Protože $f''(-1) > 0$ a f'' je spojitá, je funkce f na okolí bodu $x_0 = -1$ konvexní. Tečna ke grafu funkce f v bodě $(-1, 1)$ má rovnici

$$y = 1 \cdot (x + 1) + 1 \quad \Longrightarrow \quad y = x + 2\,.$$

Na jistém okolí bodu $(-1, 1)$ je křivka daná rovnicí $F(x, y) = 0$ grafem rostoucí, konvexní funkce proměnné x, která má v bodě grafu $(-1, 1)$ za tečnu přímku $y = x + 2$, viz obrázek 8.1. ♡



Obr. 8.1

♢ Následující rovnice na jistém okolí daného bodu (x_0, y_0) implicitně definují funkce jedné proměnné $y = f(x)$. Vyšetřete na okolí bodu x_0 průběh funkcí f pomocí jejich prvních a druhých derivací v bodě x_0. Napište rovnice tečen ke grafům funkcí f v bodě grafu (x_0, y_0). Graf funkce f včetně tečny nakreslete do obrázku.

8.9. **a)** $\mathrm{e}^{y-x} + xy - 2 = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

b) $xy^3 + \cos x + y = 0$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

c) $y\mathrm{e}^{x-1} + x\mathrm{e}^{y} - 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

d) $y + \cos(xy) - 3 = 0$, $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

e) $x + \mathrm{e}^{x+1} + y + y^4 = 0$, $(x_0, y_0) = (-1, 0)$.

f) $x^3y + x^2 - \sin y + \mathrm{tg}\, x = 0$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Taylorův polynom implicitně zadané funkce $y = f(x)$

8.10. Rovnice $x^3y + \operatorname{tg} y - 2x + 2 = 0$ na jistém okolí bodu $(1,0)$ implicitně definuje funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Vypočtěme přibližnou hodnotu funkce f v bodě $x = 1,1$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = 1$.

Řešení: Připomeňme tvar Taylorova polynomu T_2 pro funkci f v bodě $x_0 = 1$.

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

Víme, že $f(1) = 0$. Určeme hodnoty $f'(1)$ a $f''(1)$. Pro výpočet $f'(1)$ použijeme např. vzorec, viz příklad 8.4. Levá strana dané rovnice je $F(x,y)$, tj. $F(x,y) = x^3y + \operatorname{tg} y - 2x + 2$. Určeme její první parciální derivace v bodě $(1,0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - 2,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^3 + \frac{1}{\cos^2 y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = -2,\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2$$

Derivace funkce f v bodě $x_0 = 1$ je

$$f'(1) = -\frac{-2}{2} = 1\,.$$

Na jistém okolí bodu $x_0 = 1$ je funkce f' dána analyticky výrazem

$$f'(x) = -\frac{3x^2 f(x) - 2}{x^3 + \dfrac{1}{\cos^2 f(x)}}\,.$$

Odtud druhá derivace funkce f je

$$f''(x) = -\frac{\left[6xf(x) + 3x^2 f'(x)\right]\left[x^3 + \dfrac{1}{\cos^2 f(x)}\right] - \left[3x^2 f(x) - 2\right]\left[3x^2 + \dfrac{2f'(x)\sin f(x)}{\cos^3 f(x)}\right]}{\left[x^3 + \dfrac{1}{\cos^2 f(x)}\right]^2}\,.$$

Dosaďme hodnoty $x = 1$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$. Dostáváme

$$f''(1) = -\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{2^2} = -3\,.$$

Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $x_0 = 1$ má tvar

$$T_2(x) = x - 1 - \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Protože $f(x) \doteq T_2(x)$ pro x z okolí bodu $x_0 = 1$, je $f(1,1) \doteq T_2(1,1)$ a

$$T_2(1,1) = 0,1 - 1,5 \cdot 0,01 = 0,085\,.$$

Přibližná hodnota implicitně zadané funkce f v bodě $x = 1,1$ je $f(1,1) \doteq 0,085$. ♡

$\diamondsuit$ Následující rovnice na jistém okolí daného bodu (x_0, y_0) implicitně definují funkce jedné proměnné $y = f(x)$. Napište Taylorův polynom T_2 těchto funkcí f v bodě x_0. Pomocí $T_2(x)$ vypočtěte přibližné hodnoty $f(x)$ pro zadaná x.

8.11. **a)** $xy - \ln y + x^3 = 0,\ (x_0, y_0) = (0, 1),\quad x = -0,1.$

b) $y + \mathrm{e}^{y-1} + x - x^2 = 0,\ (x_0, y_0) = (-1, 1),\quad x = -0,9.$

c) $y \ln x + x\mathrm{e}^y - 1 = 0,\ (x_0, y_0) = (1, 0),\quad x = 0,95.$

d) $y\mathrm{e}^x - 2 + x^2\mathrm{e}^{y-2} = 0,\ (x_0, y_0) = (0, 2),\quad x = 0,11.$

e) $xy + \ln(x + y) + 2 = 0,\ (x_0, y_0) = (2, -1),\quad x = 1,9.$

f) $x^3y - \frac{1}{y} - x + 1 = 0,\ (x_0, y_0) = (1, 1),\quad x = 1,05.$

Tečna a normála k rovinné křivce popsané rovnicí $F(x, y) = 0$

8.12. Napišme obecnou rovnici tečny a normály k rovinné křivce $\mathcal{K}$ zadané rovnicí $xy - 2\ln x + y^3 = 0$ v bodě $(1, 0)$. Určeme úhel, pod kterým křivku $\mathcal{K}$ v bodě $(1, 0)$ protíná přímka $p\colon\ 3x + y - 3 = 0$.

Řešení: Pomocí věty o existenci implicitní funkce zjistíme, zda je křivka $\mathcal{K}$ na jistém okolí bodu $(1, 0)$ grafem funkce jedné proměnné. Levá strana rovnice je funkce $F(x, y)$, tj. $F(x, y) = xy - 2\ln x + y^3$ a zřejmě $F \in C^\infty(G)$, kde $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$. Ověřme obě podmínky:

1. $F(1, 0) = 0 - 0 + 0 = 0,$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x + 3y^2 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 1 \neq 0.$

Jsou splněny, tedy na jistém okolí bodu $(1, 0)$ je rovnicí $F(x, y) = 0$ implicitně definovaná funkce f proměnné x. Tečna ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě $(1, 0)$ je tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě. Pro výpočet $f'(1)$ použijeme vzorec, viz příklad 8.4. Určeme parciální derivaci funkce F podle x v bodě $(1, 0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y - \frac{2}{x} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) = -2$$

Směrnice tečny je $f'(1) = -\frac{-2}{1} = 2$. Ze směrnicového tvaru rovnice tečny $y = 2(x - 1)$ dostaneme její obecnou rovnici

$$t\colon\ 2x - y - 2 = 0\,.$$

Normálový vektor tečny má souřadnice $\vec{n}_t = (2, -1)$. Normála n je kolmice na tečnu t v bodě $(1, 0)$. Tedy její normálový vektor má souřadnice $\vec{n}_n = (1, 2)$. Obecná rovnice normály je $x + 2y + c = 0$. Bod $(1, 0)$ dosadíme do rovnice, protože jím normála prochází, a vypočteme konstantu c.

$$1 + c = 0 \quad\Longrightarrow\quad c = -1 \quad\Longrightarrow\quad n\colon\ x + 2y - 1 = 0$$

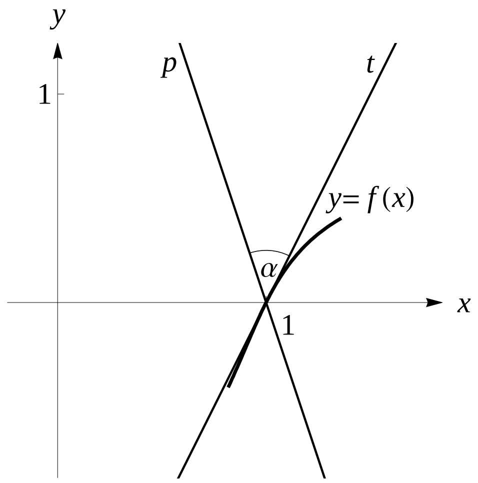
Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

V bodě $(1,0)$ přímka p křivku $\mathcal{K}$ protíná pod úhlem α, viz obr. 8.2. Tento úhel svírá přímka p a tečna t. Velikost úhlu α vypočteme ze vzorce, viz [MI], kapitola 13

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_t|}{||\vec{n}_p|| \cdot ||\vec{n}_t||},$$

kde $\vec{n}_p$ je normálový vektor přímky p, např. $\vec{n}_p = (3,1)$. Dosaďme do vzorce a vypočtěme α.

$$\cos\alpha = \frac{|(3,1)\cdot(2,-1)|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} \implies \cos\alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} \implies \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \alpha = \tfrac{\pi}{4}. \quad \heartsuit$$



Obr. 8.2

<u>Poznámka</u>: Křivka $\mathcal{K}$ je na okolí bodu (x_0,y_0) grafem funkce jedné proměnné $y=f(x)$ a

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, f(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0))}.$$

Tedy rovnice tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě (x_0,y_0), kde $y_0 = f(x_0)$, má tvar

$$y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}\,(x-x_0)+y_0\,.$$

Provedeme algebraické úpravy:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}_{\operatorname{grad} F(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0,\ y-y_0) = 0\,.$$

Protože body (x, y) a (x_0, y_0) jsou body tečny, je vektor $(x - x_0,\ y - y_0)$ její směrový vektor. Z poslední rovnosti plyne, že je kolmý na gradient funkce F v bodě (x_0, y_0), tj. $\operatorname{grad} F(x_0, y_0)$ je normálový vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě (x_0, y_0). Ukázali jsme, že je-li $\operatorname{grad} F(x_0, y_0) \neq 0$, lze obecnou rovnici tečny ke křivce zadané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě (x_0, y_0) odvodit z rovnosti

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0,\ y - y_0) = 0\,.$$

V příkladu 8.12. je $\operatorname{grad} F(1, 0) = (-2, 1)$. Snadno napíšeme obecnou rovnici tečny:

$$(-2, 1) \cdot (x - 1,\ y - 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2(x - 1) + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2x + y + 2 = 0\,.$$

♢ Napište obecnou rovnici tečny a normály v bodě A ke křivkám daným následujícími rovnicemi.

8.13. **a)** $y - \mathrm{e}^{xy} + x = 0$, $A = (0, 1)$. **b)** $3 \ln x - y^4 - 4yx^2 - 3 = 0$, $A = (1, -1)$.
c) $y + \ln y + x - 2x^2 = 0$, $A = (1, 1)$. **d)** $xy(x + 1) - \cos y = 0$, $A = (-1, \frac{\pi}{2})$.

♢ Vypočtěte úhel, pod kterým přímka p v bodě A protíná křivku danou následujícími rovnicemi.

8.14. **a)** $2x \ln y + y \ln x = 0$, $A = (1, 1)$, $p\colon\ y = 2x - 1$.
b) $y + x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y) = 0$, $A = (0, 0)$, $p\colon\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,x$.
c) $xy^3 + yx^3 + 2 = 0$, $A = (1, -1)$, $p\colon\ y = -1$.
d) $x^2 + y - 3 + \operatorname{tg}(2x + y) = 0$, $A = (-1, 2)$, $p\colon\ y = \sqrt{3}\,(x + 1) + 2$.

8.2 Implicitní funkce dvou proměnných

Předpokládejme, že $F \in C^k(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $k \geq 1$ a že pro $(x_0, y_0, z_0) \in G$ platí

$$1)\quad F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$2)\quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Potom rovnice $F(x, y, z) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$, tj. existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ tak, že pro každou dvojici $(x, y) \in O_\delta(x_0, y_0)$ existuje právě jedno $z = f(x, y) \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$, které splňuje rovnici $F(x, y, z) = 0$. Navíc $f \in C^k(O_\delta(x_0, y_0))$.

Platí-li předchozí dvě podmínky, můžeme říci, že existuje okolí bodu (x_0, y_0, z_0), kde je plocha daná rovnicí $F(x, y, z) = 0$ grafem funkce f proměnných x a y, pro kterou $z_0 = f(x_0, y_0)$. Stejně jako ve větě o existenci implicitní funkce jedné proměnné lze roli proměnných zaměnit.

8.15. Pokusme se rozhodnout pomocí věty o existenci implicitní funkce, zda rovnice $\mathrm{e}^{x(y-4)} + xz + \frac{y}{z} - 5 = 0$ na okolí bodu $A = (1, 4, 2)$ implicitně definuje funkci dvou proměnných.

Řešení: Levá strana rovnice je funkce $F(x, y, z)$, tj. $F(x, y, z) = \mathrm{e}^{x(y-4)} + xz + \frac{y}{z} - 5$ a zřejmě $F \in C^{\infty}(G)$, kde $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z \neq 0\}$. Funkční hodnota v bodě A je $F(1, 4, 2) = 1 + 2 + 2 - 5 = 0$. Bod A leží na ploše dané rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Vypočtěme první parciální derivace funkce F v bodě A.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = (y-4)\mathrm{e}^{x(y-4)} + z, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x\mathrm{e}^{x(y-4)} + \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = x - \frac{y}{z^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 4, 2) = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 4, 2) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 4, 2) = 0$$

Protože $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$, neumíme rozhodnout, zda daná rovnice na okolí bodu A nějakou implicitně zadanou funkci dvou proměnných x a y definuje či nedefinuje. Naopak $\frac{\partial F}{\partial x}(A) \neq 0$, resp. $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$, tedy danou rovnicí je na jistém okolí bodu A implicitně definovaná nějaká funkce dvou proměnných $x = g(y, z)$, resp. $y = h(x, z)$, pro které známe jednu funkční hodnotu $g(4, 2) = 1$ a $h(1, 2) = 4$ a pro které platí $F(g(y, z), y, z) = 0$ pro (y, z) z jistého okolí bodu $(y_0, z_0) = (4, 2)$, resp. $F(x, h(x, z), z) = 0$ pro (x, z) z jistého okolí bodu $(x_0, z_0) = (1, 2)$. ♡

◇ Rozhodněte podle věty o existenci implicitní funkce, zda na okolí bodu A je následujícími rovnicemi implicitně definovaná funkce dvou proměnných.

8.16. **a)** $3xz^3 - 2y^2z - \frac{4}{xy} = 0,\ A = (\frac{1}{2}, 1, 2)$.

b) $xyz - \ln(x + y + z) = 0,\ A = (0, -2, 3)$.

c) $z\mathrm{e}^{y - x^2 z} + 2xy - 3 = 0,\ A = (1, 1, 1)$.

d) $xz(x + y) - \cos(yz) = 0,\ A = (1, 0, 1)$.

e) $xz^5 + \ln\frac{x}{y} + \sqrt{zy^2} = 0,\ A = (-1, -1, 1)$.

f) $x\cos z + z\sin(xy) - y^2 = 0,\ A = (0, 0, 0)$.

8.17. Rovnice $x^3z + y^2 + 1 - \sin(yz) = 0$ na jistém okolí bodu $(1, 0, -1)$ implicitně definuje funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Vypočtěme $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)$.

Řešení: Funkce $F(x, y, z) = x^3z + y^2 + 1 - \sin(yz)$ je třídy $C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, proto $f \in C^{\infty}(O_{\delta}(1, 0))$ pro jisté $\delta > 0$ (má spojité parciální derivace všech řádů). Derivace můžeme stejně jako u implicitně zadané funkce jedné proměnné počítat dvěma způsoby. Použijme pro první parciální derivace funkce f formule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}, \quad (x, y) \in O_{\delta}(x_0, y_0).$$

Zdůrazněme, že známe jedinou funkční hodnotu implicitně zadané funkce $f(1,0) = -1$, proto může určit její derivaci jen v bodě $(1,0)$. Vypočtěme první parciální derivace funkce F v bodě $(1,0,-1)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 z, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y - z\cos(yz), \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x^3 - y\cos(yz)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,-1) = -3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0,-1) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,-1) = 1$$

Parciální derivace 1. řádu implicitně zadané funkce f v bodě $(x_0, y_0) = (1,0)$ jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -\frac{-3}{1} = 3\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -\frac{1}{1} = -1.$$

Pro $(x,y) \in O_\delta(1,0)$ je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle předchozí formule dána analyticky výrazem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{3x^2 f(x,y)}{x^3 - y\cos(y\,f(x,y))} = \frac{3x^2 f(x,y)}{y\cos(y\,f(x,y)) - x^3}.$$

Protože však neznáme explicitně funkci $f(x,y)$ pro $(x,y) \neq (1,0)$, nemůže tuto derivaci vyčíslit. Smíšenou parciální derivaci funkce f získáme derivováním funkce $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ podle y pomocí pravidla pro derivaci podílu funkcí.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)[y\cos(y\,f(x,y)) - x^3]}{[y\cos(y\,f(x,y)) - x^3]^2} - \\ - \frac{3x^2 f(x,y)[\cos(y\ f(x,y)) - y\sin(y\ f(x,y))(f(x,y) + y\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))]}{[y\cos(y\ f(x,y)) - x^3]^2}$$

Dosaďme hodnoty $x = 1$, $y = 0$, $f(1,0) = -1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1$. Smíšená derivace implicitně zadané funkce f v bodě $(1,0)$ je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = \frac{-3\cdot(-1) - (-3)\cdot 1}{(-1)^2} = 6\,. \qquad \heartsuit$$

<u>Poznámka</u>: Při výpočtu parciálních derivací implicitně zadané funkce dvou proměnných je přehlednější zkrácený zápis, kdy místo $f(x,y)$ použijeme z, místo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ použijeme z_x a místo $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ použijeme z_y. Ukažme tuto symboliku na předchozím příkladě.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2 z}{y\cos(yz) - x^3} \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3x^2 z_y\,[y\cos(yz) - x^3] - 3x^2 z\,[\cos(yz) - y\sin(yz)(z + yz_y)]}{[y\cos(yz) - x^3]^2}$$

Zdůrazněme, že z, z_x, z_y jsou funkce dvou proměnných x a y.

8.18. Rovnice $\mathrm{e}^{x(y-4)} + xz + \frac{y}{z} - 5 = 0$ na jistém okolí bodu $(1,4,2)$ implicitně definuje funkci dvou proměnných $x = g(y,z)$. Vypočtěme $\frac{\partial g}{\partial y}(4,2)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(4,2)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(4,2)$.

Řešení: Levá strana dané rovnice $F(x,y,z) = \mathrm{e}^{x(y-4)} + xz + \frac{y}{z} - 5$ je třídy $C^\infty(G)$, kde $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \neq 0\}$, proto $g \in C^\infty(O_\delta(4,2))$ pro jisté $\delta > 0$. Ukážeme druhý způsob výpočtu parciálních derivací implicitně zadané funkce dvou proměnných. Pro $(y,z) \in O_\delta(4,2)$ platí $F(g(y,z),y,z) = 0$, tj.

$$\mathrm{e}^{g(y,z)\cdot(y-4)} + g(y,z)\cdot z + \frac{y}{z} - 5 = 0\,.$$

Levá a pravá strana rovnice jsou funkce dvou proměnných y a z. Jestliže se pro každé $(y,z) \in O_\delta(4,2)$ rovnají, rovnají se také jejich derivace. Tedy „derivováním rovnice" $F(g(y,z),y,z) = 0$ podle y, resp. z získáme první parciální derivaci funkce g podle y, resp. z.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{e}^{(y-4)g(y,z)} + z\,g(y,z) + \frac{y}{z} - 5\right] = \frac{\partial}{\partial y}(0) \quad\Longrightarrow$$

$$\mathrm{e}^{(y-4)g(y,z)}\left(g(y,z) + (y-4)\,\frac{\partial g}{\partial y}(y,z)\right) + z\,\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) + \frac{1}{z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathrm{e}^{(y-4)g(y,z)} + z\,g(y,z) + \frac{y}{z} - 5\right] = \frac{\partial}{\partial z}(0) \quad\Longrightarrow$$

$$\mathrm{e}^{(y-4)g(y,z)}(y-4)\,\frac{\partial g}{\partial z}(y,z) + g(y,z) + z\,\frac{\partial g}{\partial z}(y,z) - \frac{y}{z^2} = 0$$

Dosaďme hodnoty $y = 4,\ z = 2,\ g(4,2) = 1$. Dostáváme

$$1\cdot(1+0) + 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(4,2) + \frac{1}{2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial g}{\partial y}(4,2) = -\frac{3}{4}\,,$$

$$0 + 1 + 2\,\frac{\partial g}{\partial z}(4,2) - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial g}{\partial z}(4,2) = 0\,.$$

Druhou derivaci funkce g podle z získáme opakovaným „derivováním rovnice" podle z.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathrm{e}^{(y-4)g(y,z)}(y-4)\,\frac{\partial g}{\partial z}(y,z) + g(y,z) + z\,\frac{\partial g}{\partial z}(y,z) - \frac{y}{z^2}\right] = \frac{\partial}{\partial z}(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{e}^{(y-4)g(y,z)}\left[(y-4)\,\frac{\partial g}{\partial z}(y,z)\right]^2 + \mathrm{e}^{(y-4)g(y,z)}(y-4)\,\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(y,z) + 2\,\frac{\partial g}{\partial z}(y,z) + z\,\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(y,z) + \frac{2y}{z^3} = 0$$

Dosaďme hodnoty $y = 4,\ z = 2,\ g(4,2) = 1,\ \frac{\partial g}{\partial z}(4,2) = 0$. Dostáváme

$$0 + 0 + 0 + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(4,2) + 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(4,2) = -\frac{1}{2}\,. \qquad \heartsuit$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ Pro funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně na jistém okolí bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ následujícími rovnicemi určete funkční hodnotu $f(x_0, y_0)$ a vypočtěte první a druhé parciální derivace v bodě (x_0, y_0).

8.19. **a)** $z^2 + x + y + \sin(xz) = 0,\ A = (1, -1, 0)$.

b) $(x + z)^3 + y^2 - z + (x + y)^2 = 0,\ A = (-1, 0, 1)$.

c) $\frac{y}{x} + \frac{z}{2} + \ln\left(\frac{z}{y} + x\right) = 0,\ A = (-1, 2, 4)$.

d) $2x - 1 + yz - 2\mathrm{e}^{xy+z} = 0,\ A = (3, 1, -3)$.

$\diamondsuit$ Pro funkce $x = g(y, z)$ zadané implicitně na jistém okolí bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ následujícími rovnicemi určete funkční hodnotu $g(y_0, z_0)$ a vypočtěte první a druhé parciální derivace v bodě (y_0, z_0).

8.20. **a)** $y - xz + \mathrm{e}^{xyz} = 0,\ A = (0, -1, \frac{1}{2})$.

b) $x^2 - yz + \ln(x + y + z) = 0,\ A = (-1, 1, 1)$.

$\diamondsuit$ Pro funkce $y = h(x, z)$ zadané implicitně na jistém okolí bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ následujícími rovnicemi určete funkční hodnotu $h(x_0, z_0)$ a vypočtěte první a druhé parciální derivace v bodě (x_0, z_0).

8.21. **a)** $xz^3 + y^2 z - \frac{1}{xy} - 1 = 0,\ A = (1, -1, 0)$.

b) $xz(x + y) - \cos(yz) = 0,\ A = (1, 0, 1)$.

Lokální extrémy implicitně zadané funkce $z = f(x, y)$

8.22. Rovnice $z^2 - xy + \ln(x + y + z) = 0$ na jistém okolí bodu $(1, 1, -1)$ implicitně definuje funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Pokusme se rozhodnout, zda má funkce f v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$ lokální extrém. Napišme rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě grafu $(1, 1, -1)$.

Řešení: Nejdříve musíme ověřit, že bod $(1, 1)$ je stacionární. Potom pomocí Hessiánu zjistíme, zda má funkce f v tomto bodě lokální extrém. K tomu nám stačí znát parciální derivace funkce f v bodě $(1, 1)$. Levá strana dané rovnice $F(x, y, z) = z^2 - xy + \ln(x + y + z)$ je třídy $C^\infty(G)$, kde $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z > 0\}$, proto $f \in C^\infty(O_\delta(1, 1))$ pro jisté $\delta > 0$. Pro $(x, y) \in O_\delta(1, 1)$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$, tj.

$$(f(x, y))^2 - xy + \ln(x + y + f(x, y)) = 0\,.$$

Postupným „derivováním rovnice“ podle x a y získáme první a druhé parciální derivace funkce f.

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[(f(x, y))^2 - xy + \ln(x + y + f(x, y))\Big] = \frac{\partial}{\partial x}(0) \quad \Longrightarrow$$

$$2\, f(x, y)\, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y + \frac{1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{x + y + f(x, y)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[(f(x,y))^2 - xy + \ln(x+y+f(x,y))\Big] = \frac{\partial}{\partial y}(0) \quad \Longrightarrow$$

$$2\,f(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x + \frac{1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{x+y+f(x,y)} = 0$$

Dosaďme hodnoty $x=1,\ y=1,\ f(1,1)=-1$. Dostáváme

$$2\cdot(-1)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - 1 + 1 + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0\,,$$

$$2\cdot(-1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) - 1 + 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0\,.$$

Protože $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$, je bod $(1,1)$ stacionární. Funkce f může mít v tomto bodě lokální extrém. Vypočtěme druhé parciální derivace funkce f opakovaným „derivováním rovnice“ podle x a y.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\,f(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y + \frac{1+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{x+y+f(x,y)}\right] = \frac{\partial}{\partial x}(0) \quad \Longrightarrow$$

$$2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]^2 + 2\,f(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)[x+y+f(x,y)] - \left[1+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]^2}{[x+y+f(x,y)]^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2\,f(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y + \frac{1+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{x+y+f(x,y)}\right] = \frac{\partial}{\partial y}(0) \quad \Longrightarrow$$

$$2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\,f(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) - 1 + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)}{x+y+f(x,y)} - \frac{\left[1+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]\left[1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]}{[x+y+f(x,y)]^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2\,f(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x + \frac{1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{x+y+f(x,y)}\right] = \frac{\partial}{\partial y}(0) \quad \Longrightarrow$$

$$2\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]^2 + 2\,f(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)[x+y+f(x,y)] - \left[1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]^2}{[x+y+f(x,y)]^2} = 0$$

Dosaďme hodnoty $x=1,\ y=1,\ f(1,1)=-1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$. Dostáváme

$$0 - 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -1\,,$$

$$0 - 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) - 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = -2\,,$$

$$0 - 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -1\,.$$

Hessián implicitně zadané funkce f v bodě $(1,1)$ je

$$H_f = \det\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -3 < 0\,.$$

Funkce f v bodě $(1,1)$ nemá extrém. Bod $(1,1)$ je sedlový.Nakonec napišme rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $(1,1,-1)$.

$$z = 0\cdot(x-1) + 0\cdot(y-1) - 1 \quad\Longrightarrow\quad z = -1 \qquad \heartsuit$$

$\diamondsuit$ Následující rovnice na jistém okolí daného bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ implicitně definují funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$. Rozhodněte, zda mají funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém, případně určete jeho druh. Napište rovnice tečných rovin ke grafům funkcí f v bodě grafu A.

8.23. **a)** $z\cos x + x\sin(yz) + y^2 + 1 = 0,\ A = (0,0,-1)$.

b) $y - xz + \mathrm{e}^{xyz} = 0,\ A = (2,-1,0)$.

c) $y^2 + z^2 - 2yz + x - 1 + \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,(xz) = 0,\ A = (1,1,1)$.

d) $xz^5 + \ln(xy) - \sqrt{y^2 z} + 2 = 0,\ A = (-1,-1,1)$.

e) $y\mathrm{e}^{z - x^2 y} + 2xz - 3 = 0,\ A = (1,1,1)$.

f) $x + y + 3z + \ln\dfrac{y+z}{x} = 0,\ A = (1,2,-1)$.

g) $3 - (x+y)z - \mathrm{e}^{z-xy} = 0,\ A = (1,1,1)$.

Totální diferenciál implicitně zadané funkce $z = f(x,y)$

8.24. Rovnice $2x + z + \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{z-x} = 0$ na jistém okolí bodu $(-1,0,2)$ implicitně definuje funkci dvou proměnných $z = f(x,y)$. Vypočtěme přibližnou hodnotu přírůstku funkce $\triangle f = f(-0,85;-0,1) - f(-1,0)$ pomocí totálního diferenciálu funkce f v bodě $(-1,0)$.

Řešení: Připomeňme tvar totálního diferenciálu pro funkci f v bodě $(x_0,y_0) = (-1,0)$.

$$\mathrm{d}f(-1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)\ \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0)\ \mathrm{d}y$$

Pro výpočet prvních parciálních derivací implicitně zadané funkce f v bodě $(-1,0)$ použijeme vzorce, viz příklad 8.17. Levá strana dané rovnice je $F(x,y,z) = 2x + z + \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{z-x}$, $F \in C^\infty(G)$, kde $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \neq z\}$. Vypočtěme její první parciální derivace v bodě $(-1,0,2)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2 + \frac{y}{(z-x)^2 + y^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial F}{\partial x}(-1,0,2) = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{z-x}{(z-x)^2 + y^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1,0,2) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 1 - \frac{y}{(z-x)^2 + y^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial F}{\partial z}(-1,0,2) = 1$$

Parciální derivace 1. řádu funkce f v bodě $(-1,0)$ jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = -\frac{2}{1} = -2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = -\frac{\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Totální diferenciál implicitně zadané funkce f v bodě $(-1,0)$ má tvar

$$\mathrm{d}f(-1,0) = -2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y\,.$$

Pro (x,y) blízká $(-1,0)$ platí

$$\triangle f = f(x,y) - f(-1,0) \doteq \mathrm{d}f(-1,0)\,.$$

V našem případě je $(x,y) = (-0,85;-0,1)$. Proměnná x se mění z hodnoty -1 na $-0,85$; tj. $\mathrm{d}x = x - x_0 = -0,85 - (-1) = 0,15$ a proměnná y z hodnoty 0 na $-0,1$; tj. $\mathrm{d}y = y - y_0 = -0,1 - 0 = -0,1$. Přibližná hodnota přírůstku funkce f je

$$\triangle f = f(-0,85;-0,1) - f(-1,0) \doteq \mathrm{d}f(-1,0) = -2\cdot 0,15 - \frac{1}{3}\cdot(-0,1) = -0,2\bar{6}\,. \qquad \heartsuit$$

$\diamondsuit$ Následující rovnice na jistém okolí daného bodu $A = (x_0,y_0,z_0)$ implicitně definují funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$. Vypočtěte přibližnou hodnotu přírůstku funkcí $\triangle f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ pomocí totálního diferenciálu funkce f v bodě (x_0,y_0).

8.25. **a)** $x^3 + y + 4z - x\mathrm{e}^{1+yz} = 0$, $A = (1,-2,\frac{1}{2})$, $(x,y) = (0,9\,;-1,8)$.

b) $\frac{xy}{z} - \ln\frac{z}{y}\log(x+10) = 0$, $A = (0,1,1)$, $(x,y) = (0,15\,;1,05)$.

c) $x^3yz + xy^5 + 2z^3 = 0$, $A = (1,-1,1)$, $(x,y) = (1,05\,;-0,8)$.

d) $xz + y - \frac{1}{z} - \cos(xy) = 0$, $A = (2,0,1)$, $(x,y) = (2,03\,;-0,12)$.

Taylorův polynom implicitně zadané funkce $z = f(x,y)$

8.26. Rovnice $4\sqrt{z} + \frac{x^2}{yz} - y^2 = 0$ na jistém okolí bodu $(0,-2,1)$ implicitně definuje funkci dvou proměnných $z = f(x,y)$. Vypočtěme přibližnou hodnotu funkce f v bodě $(x,y) = (0,15\,;-1,9)$ pomocí Taylorova polynomu druhého stupně implicitně zadané funkce f v bodě $(0,-2)$.

Řešení: Připomeňme tvar Taylorova polynomu T_2 pro funkci f v bodě $(x_0,y_0) = (0,-2)$.

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = f(0,-2) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(0,-2)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,-2)\cdot(y+2) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2)\cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,-2)\cdot x\,(y+2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-2)\cdot(y+2)^2 \end{aligned}$$

Víme, že $f(0,-2) = 1$. Pro výpočet hodnot $\frac{\partial f}{\partial x}(0,-2)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-2)$ použijeme např. vzorce, viz příklad 8.17. Levá strana dané rovnice $F(x,y,z) = 4\sqrt{z} + \frac{x^2}{yz} - y^2$ je třídy $C^\infty(G)$, kde $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z > 0\ \wedge\ y \neq 0\}$, proto $f \in C^\infty(O_\delta(0,-2))$ pro jisté $\delta > 0$. Určeme parciální derivace 1. řádu funkce F v bodě $(0,-2,1)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\frac{2x}{yz},\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{x^2}{y^2z}-2y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{z}}-\frac{x^2}{yz^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,-2,1)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,-2,1)=4,\quad \frac{\partial F}{\partial z}(0,-2,1)=2$$

První parciální derivace implicitně zadané funkce f v bodě $(0,-2)$ jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-2)=-\frac{0}{2}=0\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,-2)=-\frac{4}{2}=-2.$$

Pro $(x,y)\in O_\delta(0,-2)$ jsou funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ dány analytickými výrazy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{2x}{yz}}{\frac{2}{\sqrt{z}}-\frac{x^2}{yz^2}}=\frac{2xz}{x^2-2yz^{\frac{3}{2}}}\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{-\frac{x^2}{y^2z}-2y}{\frac{2}{\sqrt{z}}-\frac{x^2}{yz^2}}=\frac{x^2z+2y^3z^2}{2y^2z^{\frac{3}{2}}-x^2y}\,,$$

kde $z=f(x,y)$. Dále budeme používat pro $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ označení z_x a pro $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ symbol z_y. Derivováním předchozích výrazů podle x a y získáme druhé parciální derivace implicitně zadané funkce f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2xz}{x^2-2yz^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{[2z+2xz_x][x^2-2yz^{\frac{3}{2}}]-2xz[2x-3yz_x\sqrt{z}\,]}{[x^2-2yz^{\frac{3}{2}}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2xz}{x^2-2yz^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{2xz_y[x^2-2yz^{\frac{3}{2}}]-2xz[-2z^{\frac{3}{2}}-3yz_y\sqrt{z}\,]}{[x^2-2yz^{\frac{3}{2}}]^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2z+2y^3z^2}{2y^2z^{\frac{3}{2}}-x^2y}\right]=\frac{[x^2z_y+6y^2z^2+4y^3zz_y][2y^2z^{\frac{3}{2}}-x^2y]}{[2y^2z^{\frac{3}{2}}-x^2y]^2}-$$
$$-\frac{[x^2z+2y^3z^2][4yz^{\frac{3}{2}}+3y^2z_y\sqrt{z}-x^2]}{[2y^2z^{\frac{3}{2}}-x^2y]^2}$$

Dosaďme $x=0$, $y=-2$, $z=f(0,-2)=1$, $z_x=\frac{\partial f}{\partial x}(0,-2)=0$ a $z_y=\frac{\partial f}{\partial y}(0,-2)=-2$. Pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2)=\frac{2\cdot 4-0}{4^2}=\frac{1}{2}\,,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,-2)=\frac{0-0}{4^2}=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-2)=\frac{(24+64)\cdot 8+2\cdot(-8-24)}{8^2}=3\,.$$

Taylorův polynom 2. stupně implicitně zadané funkce f v bodě $(0,-2)$ má tvar

$$T_2(x,y)=1-2(y+2)+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}\,(y+2)^2.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Protože $f(x,y) \doteq T_2(x,y)$ pro $(x,y) \in O_\delta(0,-2)$, je $f(0,15\,;-1,9) \doteq T_2(0,15\,;-1,9)$ a

$$T_2(0,15\,;-1,9) = 1 - 2\cdot 0,1 + 0,25\cdot 0,15^2 + 1,5\cdot 0,01 = 0,820625\,.$$

Přibližná hodnota funkce f v bodě $(0,15\,;-1,9)$ je $f(0,15\,;-1,9) \doteq 0,820625$. ♡

◇ Následující rovnice na jistém okolí daného bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ implicitně definují funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$. Napište Taylorův polynom T_2 těchto funkcí f v bodě (x_0, y_0). Pomocí $T_2(x,y)$ vypočtěte přibližné hodnoty $f(x,y)$ pro zadané (x,y).

8.27. **a)** $xz + \ln(y+z) + x^3y = 0,\ A = (0,2,-1),\quad (x,y) = (0,06\,;2,1)$.

b) $y + \mathrm{e}^{xz} + \dfrac{x+z}{y^2} = 0,\ A = (-2,1,0),\quad (x,y) = (-2,05\,;1,15)$.

c) $\dfrac{\ln(yz)}{x} - 2x^2z + \frac{y}{2} = 0,\ A = (1,-2-\frac{1}{2}),\quad (x,y) = (0,8\,;-2,08)$.

d) $2\sqrt{xz} - \frac{y}{z} - x^2y^3 = 0,\ A = (1,1,1),\quad (x,y) = (0,88\,;1,12)$.

◇ Následujícími rovnicemi jsou na jistém okolí daného bodu $A = (0,0,z_0)$ implicitně definované funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$. Pro malé hodnoty $|x|, |y|$ určete aproximaci funkce f Taylorovým polynomem daného stupně.

8.28. **a)** $\dfrac{\sin(yz)}{x-1} + x^2y + z - 1 = 0,\quad z_0 = 1,\quad n = 1$.

b) $xy\mathrm{e}^y + z\ln(x-z) = 0,\quad z_0 = -1,\quad n = 1$.

c) $xy^3 - 2y + z + 1 + \operatorname{arctg}\frac{x}{z} = 0,\quad z_0 = -1,\quad n = 2$.

d) $z\mathrm{e}^{x-y} + xy\mathrm{e}^{z-3} - 3 = 0,\quad z_0 = 3,\quad n = 2$.

Aplikační úlohy

Je-li $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, pak je gradient funkce F v bodě $A = (x_0, y_0, z_0)$ normálovým vektorem k ploše σ: $F(x,y,z) = 0$ v bodě A. Body (x,y,z) tečné roviny k ploše σ v bodě A splňují rovnost

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)\cdot(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0\,.$$

• **8.29.** Napišme obecnou rovnici tečné roviny k elipsoidu $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$ v bodě $(4,1,1)$. Dále najděme body elipsoidu, v nichž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $x + 4y + 6z = 0$.

Řešení: Levá strana rovnice je funkce $F(x,y,z)$, tj. $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$. Vypočtěme její gradient v bodě $(4,1,1)$. První parciální derivace funkce F jsou

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 4y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 6z\,.$$

Gradient funkce F v bodě (x,y,z) je vektor $\operatorname{grad} F(x,y,z) = (2x,\ 4y,\ 6z)$. V bodě $(4,1,1)$ je $\operatorname{grad} F(4,1,1) = (8,\ 4,\ 6)$. Tento vektor je normálový vektor tečné roviny τ k elipsoidu v bodě $(4,1,1)$. Tedy pro body $(x,y,z) \in \tau$ platí

$$(8,\ 4,\ 6)\cdot(x-4,\ y-1,\ z-1) = 0\,.$$

Dubcová Miroslava, Pustková Lucie, Simerská Carmen: Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Proveďme skalární součin.

$$8(x-4)+4(y-1)+6(z-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad \tau:\ 8x+4y+6z-42=0$$

Tečná rovina k elipsoidu a daná rovina $x+4y+6z=0$ jsou rovnoběžné, jestliže jejich normálové vektory jsou lineárně závislé, tj. $\operatorname{grad} F(x,y,z)=(2x,\,4y,\,6z)$ je nenulovým násobkem vektoru $\vec{n}=(1,4,6)$. Gradient uvažujeme pouze v bodech (x,y,z) elipsoidu, splňují rovnost $x^2+2y^2+3z^2-21=0$. Hledané uspořádané trojice (x,y,z) tak řeší soustavu algebraických rovnic

$$\begin{array}{l} 2x=k\,,\ \ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ 4y=4k \\ 6z=6k \\ \hline x^2+2y^2+3z^2-21=0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{r} x=\frac{k}{2} \\ y=k \\ z=k \\ \hline \left(\frac{k}{2}\right)^2+2k^2+3k^2-21=0 \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l} x=\frac{k}{2} \\ y=k \\ z=k \\ \hline k=\pm 2\,. \end{array}$$

V bodě $T_1=(1,2,2)$ a $T_2=(-1,-2,-2)$ mají tečné roviny k elipsoidu rovnici

$$x+4y+6z+d=0\,,\ \ d\in\mathbb{R}\,.$$

Dosazením bodu T_1 do rovnice získáme $d_1=-21$, tj. tečná rovina v bodě $T_1=(1,2,2)$ je $x+4y+6z-21=0$. Po dosazení bodu $T_2=(-1,-2,-2)$ vypočteme $d_2=21$, tedy tečná rovina v bodě T_2 je $x+4y+6z+21=0$. ♡

◊ Určete obecnou rovnici tečné roviny k následujícím plochám v bodě A.

8.30. **a)** $y-xz+\mathrm{e}^{xyz}=0,\quad A=(1,0,1)$.

b) $x^2+yz+\ln(x+3y+z)=0,\quad A=(-1,1,-1)$.

c) $xz^3+y^2z-\dfrac{2}{xy}=0,\quad A=(1,-1,1)$.

d) $xz(x-y-2)+\sin(yz)=0,\quad A=(2,0,\frac{1}{2})$.

8.31. Najděte body na sféře $x^2+y^2+z^2-6y+4z-12=0$, v nichž jsou tečné roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami.

• **8.32.** Napište rovnici tečné roviny k elipsoidu $x^2+4y^2+9z^2-36=0$, která vytíná na souřadniciových osách tytéž kladné úseky.

8.33. Vypočtěte totální diferenciál $\mathrm{d}T$ pro jeden mol reálného plynu, který se řídí Redlichovou-Kwongovou stavovou rovnicí $PV=RT+P\left(b-\frac{a}{R}\,T^{-\frac{3}{2}}\right)$, kde a, b, R jsou konstanty.

8.34. Entropie S je funkcí teploty a tlaku P, tj. $S=S(T,P)$. Vypočtěte $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V$ pro plyn, který se řídí Redlichovou-Kwongovou rovnicí, viz předchozí příklad.

8.35. Vypočtěte přibližnou změnu objemu V jednoho molu reálného plynu, který se řídí van der Waalsovou stavovou rovnicí $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$, kde a, b, R jsou konstanty, jestliže se tlak změní o $\mathrm{d}P$ a teplota o $\mathrm{d}T$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

• **8.36.** Vypočtěte koeficient rozpínavosti $\gamma = \frac{1}{P_0} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ pro jeden mol reálného plynu, který se řídí stavovou rovnicí $PV = zRT$, kde z je kompresibilitní faktor závisející na teplotě a tlaku, tj. $z = z(T, P)$ a R je konstanta.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

9 Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

9.1 Geometrické aplikace

Nejdříve si uvedeme vzorce, které budeme v tomto odstavci používat.
Délka křivky v kartézských souřadnicích (křivka je grafem funkce $y = f(x),\ x \in \langle a, b \rangle$):

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Délka parametricky zadané křivky $x = g(t),\ y = f(t),\ t \in \langle a, b \rangle$):

$$l = \int_a^b \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Objem rotačního tělesa (kolem osy x rotuje rovinný obrazec ohraničený grafem funkce $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$):

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plošný obsah obrazce zadaného v polárních souřadnicích (obrazec ohraničený grafem funkce v polárních souřadnicích $r = f(\varphi),\ \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a polopřímkami o rovnicích $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$):

$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Výpočet délky křivky

9.1. Vypočtěme délku křivky, která je grafem funkce $y = 2\ln x$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Řešení: Křivka je nakreslena na obr. 9.1. Nejdříve vypočteme $f'(x) = \frac{2}{x}$. Po dosazení do vzorce dostaneme

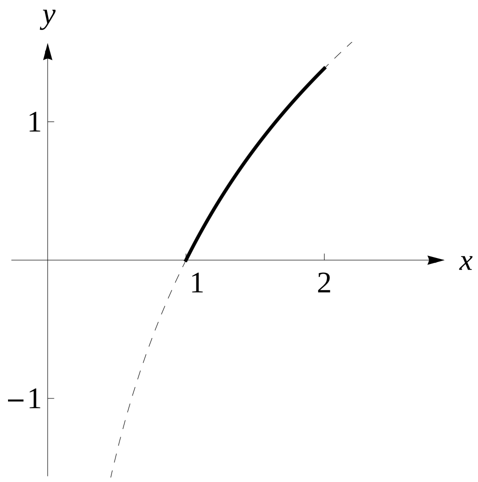
$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integrand nejprve upravíme

$$l = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Pro výpočet integrálu použijeme substituci

$$t = \sqrt{x^2+4}.$$



Obr. 9.1

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$$l = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow x^2 = t^2 - 4 \\ \mathrm{d}t = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x \\ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{5} \\ x = 2 \Rightarrow t = 2\sqrt{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} 1 + \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} 1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t = \left[t + \ln\frac{|t-2|}{|t+2|}\right]_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} =$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{5} + \ln\left(\frac{\left(2\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(2\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}\right) \doteq 1,71688.$$

♡

◊ V následujících příkladech vypočítejte délku křivky, která je grafem dané funkce.

9.2. **a)** $f(x) = \sqrt{x^3},\ x \in \langle 0, \frac{4}{3}\rangle$. **b)** $f(x) = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5},\ x \in \langle 0, 1\rangle$.

c) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x,\ x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle$. **d)** $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$, mezi průsečíky s osou x.

• **9.3.** $f(x) = \ln\sin x,\ x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

9.4. Vypočtěme délku křivky zadané parametrickými rovnicemi:

$$x = \cos^2 t,\ y = t - \sin t\cos t,\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Řešení: Nejdříve si vypočteme derivace funkcí $x(t)$ a $y(t)$:

$$x'(t) = -2\cos t\,\sin t,\ y'(t) = 1 - \cos^2 t + \sin^2 t = 2\sin^2 t.$$

Po dosazení do vzorce dostáváme

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\cos t\,\sin t)^2 + (2\sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 t\,\sin^2 t + 4\sin^4 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\mathrm{d}t = 2\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(0+1) = 2.$$

♡

◊ V následujících příkladech vypočítejte délku křivky, která je zadaná parametrickými rovnicemi.

9.5. **a)** $x(t) = 3t^2$, $y(t) = (t^2-3)t,\quad t \in \langle 0, \sqrt{3}\rangle$. **b)** $x(t) = \sin t$, $y(t) = t + \cos t,\quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

c) $x(t) = \sin t + \cos t$, $y(t) = \sin t - \cos t,\quad t \in \langle 0, \pi\rangle$. **d)** $x(t) = t^3 - t$, $y(t) = \sqrt{3}\,t^2,\quad t \in \langle 0, 1\rangle$.

• **9.6.** **a)** $\begin{aligned} x(t) &= 2\sqrt{t} \\ y(t) &= \ln t, \quad t \in \langle 3, 8\rangle. \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle. \end{aligned}$

Výpočet objemu rotačního tělesa

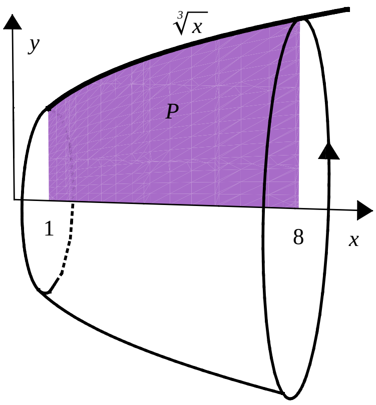
9.7. Vypočtěme objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 8$ kolem osy x.

Řešení: Nejdříve si načrtneme těleso, jehož objem budeme počítat. Těleso vznikne rotací rovinného obrazce P kolem osy x (viz obr. 9.2). Objem rotačního tělesa je dán integrálem:

$$V = \pi \int_1^8 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Nyní tento integrál vypočteme.

$$V = \pi \int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}\right]_1^8 = \frac{3}{5}\pi(32-1) = \frac{93}{5}\pi\,.$$



Obr. 9.2 ♡

◇ Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného danými křivkami kolem osy x. Načrtněte rovinný obrazec a těleso.

9.8. **a)** $y = \operatorname{cotg} x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$. **b)** $y = x - x^2,\ y = 0$.

c) $y = \ln x,\ y = 0,\ x = \mathrm{e}$. **d)** $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x},\ y = 0,\ x = 1$.

e) $y = \frac{1}{x+1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$. **f)** $y = (x-1)^3 + 1,\ y = 0,\ x = 2$.

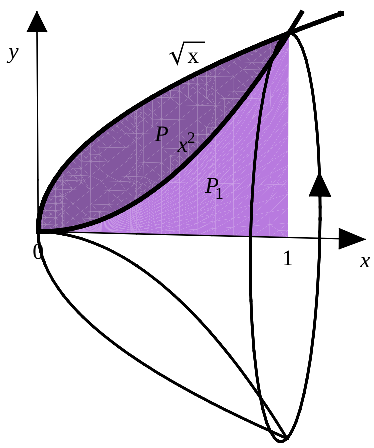
9.9. Vypočtěme objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ kolem osy x.

Řešení: Nejdříve si načrtneme těleso, jehož objem počítáme. Vypočteme průsečíky obou křivek:

$$\begin{matrix} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = x^2 \;\Rightarrow\; x = x^4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^4 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \vee x = 1) \;\Rightarrow\; \begin{matrix} [0,0] \\ [1,1] \end{matrix}\,.$$

Těleso vznikne rotací rovinného obrazce P kolem osy x (viz obr. 9.3). Objem rotačního tělesa je dán rozdílem dvou integrálů:



Obr. 9.3

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 \mathrm{d}x \,.$$

První integrál popisuje objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce $P_2 = P + P_1$ kolem osy x. Druhý integrál představuje objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce P_1 kolem osy x. Nyní integrály vypočteme:

$$V = \pi \left(\int_0^1 x \,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x \right) = \pi \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} \,.$$

♡

◇ Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného danými křivkami kolem osy x. Načrtněte rovinný obrazec a těleso.

9.10. **a)** $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 - x$.

b) $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$.

c) $y = \sin x$, $y = \cos x$ a $x = 0$, předpokládejte $x \geq 0$.

d) $y = x^2$, $y = 2 - x$ a $x = 0$, předpokládejte $x \geq 0$.

e) $y = \frac{2-x}{2}$, $y = \frac{x+2}{2}$, $x = 1$.

f) $y = x^2$, $y = 2 - x$ a $y = 0$.

Výpočet plošného obsahu obrazce zadaného v polárních souřadnicích

9.11. Nakresleme křivku danou v polárních souřadnicích $r(\varphi) = 2(1 - \sin\varphi)$ a vypočítejme plošný obsah obrazce omezeného touto křivkou.

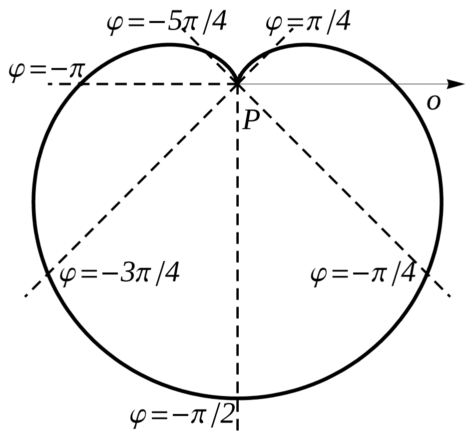
Řešení: Proměnná r je vzdálenost bodu od pólu, proto $r \geq 0$. V našem případě musí platit $2(1 - \sin\varphi) \geq 0$. Tato nerovnice je splněna pro $\varphi \in \mathbb{R}$. Protože je daná funkce $r(\varphi)$ periodická s periodou 2π, vyšetřujeme její průběh například na intervalu

$$\varphi \in \langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Křivka vychází z počátku ($r(-\frac{3\pi}{2}) = 0$). Protože funkce $r(\varphi)$ je na intervalu $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ rostoucí, křivka se pro tyto úhly od počátku vzdaluje. Pro $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se křivka zase přibližuje k počátku, protože funkce $r(\varphi)$ je zde klesající. Protože $r(\frac{\pi}{2}) = 0$, křivka se vrací do počátku. Křivka se nazývá kardioida a je nakreslena na obr. 9.4. Protože rovinný obrazec omezený danou křivkou je symetrický, můžeme počítat pouze polovinu obrazce a uvažovat pouze interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Hledaná plocha tedy je:

$$\begin{aligned} P &= 2\ P_1 = 2\,\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\ (1 - \sin\varphi)^2\ \mathrm{d}\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\ \sin\varphi + \sin^2\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\ \sin\varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2})\ \mathrm{d}\varphi = 4\ \left[\frac{3}{2}\ \varphi + 2\ \cos\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi. \end{aligned}$$

♡



Obr. 9.4

♢ V následujících příkladech vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou danou v polárních souřadnicích. Rovinný obrazec načrtněte.

9.12. **a)** $r(\varphi) = \sin 2\varphi$. **b)** $r(\varphi) = -2\sin 2\varphi$.

c) $r(\varphi) = \cos 3\varphi$. **d)** $r(\varphi) = 2 - \sin^2\varphi - \cos\varphi$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

10 Dvojný integrál

V této kapitole budeme integrovat funkce dvou proměnných přes množinu $D \subset \mathbb{R}^2$. Podrobné teorii je věnována kapitola 10 ve skriptech [MII].

10.1 Výpočet dvojného integrálu přes obdélníkové obory

Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Potom k výpočtu dvojného integrálu použijeme vztah (Fubiniova věta)

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\ .$$

10.1. Vypočtěme dvojný integrál

$$\iint_D \mathrm{e}^{x+2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \text{kde}\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}.$$

Řešení: Integrovaná funkce je spojitá na obdélníkovém integračním oboru D, jsou splněny předpoklady Fubiniovy věty. Převedeme tedy dvojný integrál na dvojnásobný:

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{e}^{x+2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \mathrm{e}^{x+2y}\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x \left(\int_0^2 \mathrm{e}^{2y}\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^2 \mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y\right) = \\ &= \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 \left[\frac{\mathrm{e}^{2y}}{2}\right]_0^2 = (\mathrm{e}-1)\left(\frac{\mathrm{e}^4-1}{2}\right).\end{aligned}$$

♡

10.2. Vypočtěme $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{4+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \text{kde}\ D = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,2\rangle.$

Řešení: Funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{4+y^2}$ je spojitá na $D = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Pomocí Fubiniovy věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Na pořadí integrace nezáleží, neboť integrační meze jsou konstantní.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2}{4+x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_0^2 \frac{x^2}{4+x^2y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^2}{4}\left(\int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{xy}{2}\right)^2}\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{4}\left(\frac{2}{x}\int_0^2 \frac{\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}y\right)^2}\ \mathrm{d}y\right) = \int_0^2 \frac{x}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{xy}{2}\right]_0^2\ \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 \frac{x}{2}\operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\operatorname{arctg} x\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \\ &= \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{4}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^2 = \\ &= \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} 2 = \frac{5}{4}\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

♡

$\diamondsuit$ V následujících příkladech vypočtěte dvojný integrál přes obdélníkový integrační obor.

10.3. **a)** $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^4 - 4y + 7\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle -1, 2\rangle \times \langle -2, 3\rangle.$

b) $\displaystyle\iint\limits_D x\, \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle 0, 4\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$

c) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$

d) $\displaystyle\iint\limits_D x \sin y \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$

e) $\displaystyle\iint\limits_D (x+y) \ln y \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle.$

f) $\displaystyle\iint\limits_D y\, \mathrm{e}^{(x+y^2)} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$

g) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle 3, 4\rangle \times \langle 1, 2\rangle.$

h) $\displaystyle\iint\limits_D x^2\, y \sin(x+y^2) \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \quad D = \langle 0, \tfrac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \sqrt{\pi}\rangle.$

10.2 Výpočet dvojného integrálu přes standardní množiny

V tomto odstavci opět využijeme Fubiniovu větu, tentokrát pro výpočet dvojného integrálu přes standardní množiny 1. a 2. typu:

1. Nechť existuje dvojný integrál funkce $f(x,y)$ přes standardní množinu D 1. typu,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle a, b\rangle,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\ \},$$

kde $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ splňující podmínku $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\ .$$

2. Nechť existuje dvojný integrál funkce $f(x,y)$ přes standardní množinu D 2. typu,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle c, d\rangle,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\ \},$$

kde $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$ splňující podmínku $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ pro každé $y \in \langle c, d\rangle$. Pak

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y\ .$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

10.4. Načrtněme integrační obor integrálu I. Zaměňme pořadí integrace a pak integrál vypočtěme.

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} (3x^2 + y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

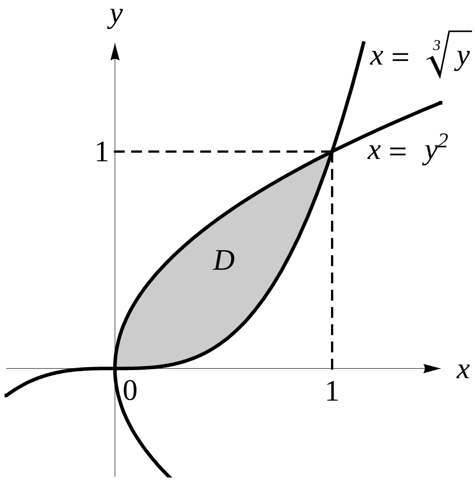
Řešení: Integračním oborem je množina

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1 \rangle,\ y^2 \le x \le \sqrt[3]{y}\}.$$

Je to standardní množina 2. typu, Množina D je znázorněna na obr. 10.1. Abychom mohli zaměnit pořadí integrace popíšeme množinu D jako standardní množinu 1. typu:

$$x \in \langle 0,1 \rangle,\ x^3 \le y \le \sqrt{x}.$$

Nyní provedeme záměnu pořadí integrace a integrál vypočteme:



Obr. 10.1

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} (3x^2 + y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (3x^2 + y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[3x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - 3x^5 - \frac{x^6}{2} \right) \mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{6}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{14} \right]_0^1 = \frac{6}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{15}{28}. \end{aligned}$$

♡

◊ V následujících příkladech nakreslete integrační obor integrálu, zaměňte pořadí integrace a integrál vypočtěte.

10.5. **a)** $\displaystyle\int_{-4}^{0} \left(\int_{-\frac{1}{2}y}^{2} \cos \frac{x-y}{x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$ **b)** $\displaystyle\int_{-3}^{0} \left(\int_{-6}^{2x} \sin \frac{\pi x}{y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \left(\int_{-x}^{2} \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left(\int_{x}^{2} \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

$\diamondsuit$ V následujících příkladech zaměňte pořadí integrace.

10.6. **a)** $\displaystyle\int\limits_0^2 \left(\int\limits_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$ **b)** $\displaystyle\int\limits_{-6}^2 \left(\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$

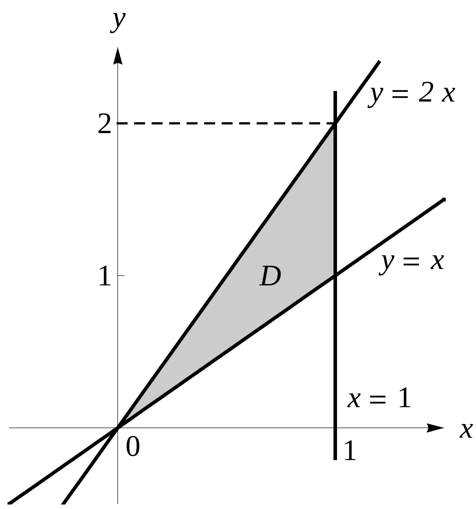
c) $\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} \left(\int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$ **d)** $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_1^3 \left(\int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$

10.7. Vypočtěme dvojný integrál funkce $f(x,y) = x + y^2$ přes množinu D, která je ohraničena grafy funkcí $y = 2x$, $y = x$ a přímkou $x = 1$.

Řešení: Integrační obor je na obrázku 10.2. Dvojný integrál převedeme na dvojnásobný. Funkce $f(x,y)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$, Integrační obor popíšeme jako množinu 1. typu

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1 \rangle, x \le y \le 2x\},$$

$\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 2x$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ jsou spojité na $\langle 0,1 \rangle$ a $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)\ \forall\, x \in \langle 0,1 \rangle$. Předpoklady Fubiniovy věty jsou tedy splněny.



Obr. 10.2

$$\iint\limits_D \left(x + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^{2x} \left(x + y^2\right)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[x\ y\ + \frac{y^3}{3} \right]_x^{2x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{7x^3}{3} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{11}{12}.$$

$\heartsuit$

$\diamondsuit$ Vypočtěte dvojné integrály. Integrační obor nakreslete.

10.8. **a)** $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

kde D je trojúhelník s vrcholy $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (0,1)$.

b) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

kde D je ohraničena grafy funkcí $y = x$, $y = 1$ a přímkou $x = 2$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

c) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

kde D je omezená množina ohraničená křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$.

d) $\displaystyle\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

kde D je množina, ohraničená křivkou $y^2 = 4x$, přímkou $x = 1$ a $y = 0$, ležící v I. kvadrantu.

e) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

kde D je rovnoběžník, jehož strany leží na přímkách $y = x$, $y = x + 1$, $x = 1$, a $x = 3$.

f) $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

kde D je ohraničena křivkou $x = -y^2$ a přímkami $x = 0$, $y = 1$.

g) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x + y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

kde D je ohraničena přímkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

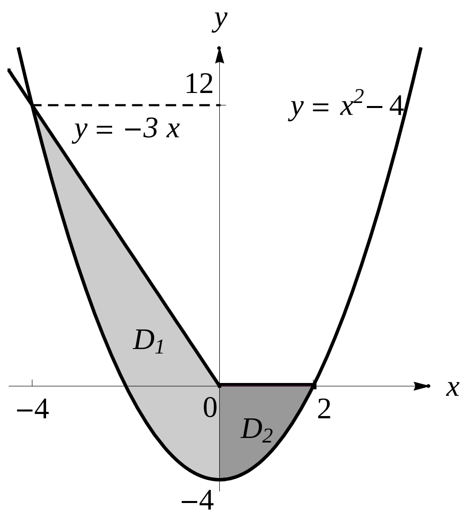
10.9. Vypočtěme dvojný integrál funkce $f(x, y) = 1 + x$ přes množinu D, která je sjednocením dvou množin D_1, D_2. Množina D_1 leží v polorovině $x \le 0$ a je ohraničená grafy funkcí $y = x^2 - 4$ a $y = -3x$. Množina D_2 leží v polorovině $x \ge 0$ a je ohraničená grafy funkcí $y = x^2 - 4$ a $y = 0$.

Řešení: Nakreslíme integrační obor D, viz obr. 10.3. Z obrázku je zřejmé, že $D = D_1 \cup D_2$. Množiny D_1 a D_2 popíšeme jako standardní množiny 1. typu. Najdeme nejprve průsečíky grafů funkcí, tj.

$$\begin{aligned} \text{pro } x \le 0: \quad & x^2 - 4 = -3x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow x_1 = -4 \text{ a } y_1 = 12, \\ \text{pro } x > 0: \quad & x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2 \text{ a } y_3 = 0. \end{aligned}$$

Pro množiny D_1, D_2 platí

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle -4, 0\rangle\,,\ x^2 - 4 \le y \le -3x\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0, 2\rangle\,,\ x^2 - 4 \le y \le 0\}. \end{aligned}$$



Obr. 10.3

Funkce $f(x,y) = 1+x$ je spojitá na standardní množině $D = D_1 \cup D_2$, tedy:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D (1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1} (1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} (1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int\limits_{-4}^{0} \left(\int\limits_{x^2-4}^{-3x} (1+x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} \left(\int\limits_{x^2-4}^{0} (1+x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-4}^{0} (1+x)\Big(-3x-(x^2-4)\Big)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} (1+x)\Big(0-(x^2-4)\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-4}^{0} (4+x-4x^2-x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4+4x-x^2-x^3)\,\mathrm{d}x = -4\,. \qquad \heartsuit
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$ V následujících příkladech vypočtěte dvojné integrály

10.10. a) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde D je trojúhelník ABC, který má strany na přímkách $y = x$, $y = -x$ a $y = -2x-3$.

b) $\iint\limits_D \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde D je lichoběžník s vrcholy $P = [-2, 0]$, $Q = [-1, 0]$, $R = [0, 1]$, $S = [0, 2]$.

10.3 Substituční metoda

Předpokládejme, že existuje dvojný integrál funkce $f(x,y)$ přes standardní množinu D a že $\Phi = (\varphi, \psi)$ je regulární zobrazení, které zobrazuje standardní množinu H na standardní množinu D. Pak můžeme použít substituci pro dvojný integrál

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_H f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde $J(u,v)$ je Jacobián zobrazení $\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$. Nejčastěji používáme substituci do polárních souřadnic, tj.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\,, \quad r \in (0,\infty\rangle,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi).$$

. V případě polárních souřadnic je Jacobián $J(u,v) = r$.

10.11. Vypočtěme dvojný integrál

$$I = \iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Řešení: Protože množina D je kruh použijeme substituci do polárních souřadnic. Regulární zobrazení $\Phi(u,v) = (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)$ zobrazuje množinu

$$H = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2;\ r \in (0,1\rangle,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi)\}$$

na množinu $D \setminus \{(0,0)\}$.
Provedeme substituci do polárních souřadnic, dvojný integrál převedeme na dvojnásobný a vypočteme ho.

$$I = \iint_H (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \iint_H r^2\sqrt{1-r^2}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r = \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi \right) \left(\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r \right) =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = \left| \begin{array}{rcl} 1-r^2 & = & u^2 \\ -2r\,\mathrm{d}r & = & 2u\,\mathrm{d}u \\ r=0 & \Rightarrow & u=1 \\ r=1 & \Rightarrow & u=0 \end{array} \right| = 2\pi \int_1^0 -(1-u^2)\,u^2\mathrm{d}u =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (u^2 - u^4)\,\mathrm{d}u = 2\pi \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}\pi.$$

♡

◇ K výpočtu následujících dvojných integrálů použijte vhodnou substituci.

10.12. a) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4\}$.

b) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1 \wedge y \ge 0\}$.

c) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \pi \le x^2+y^2 \le 4\pi\}$.

d) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2+y^2 \le 1\}$.

e) $\displaystyle\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$.

f) $\displaystyle\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le \pi^2\}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

g) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4}+y^2\le 1\}$.

Použijte transformaci do zobecněných polárních souřadnic:

$x=2r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r\in\langle 0,1\rangle,\ \varphi\in\langle 0,2\pi)$.

h) $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+y\le 1\wedge x\ge 0\wedge y\ge 0\}$.

Použijte transformaci: $u=x-y$, $v=x+y$.

10.4 Aplikace dvojného integrálu

Užitím dvojného integrálu počítáme objemy těles a plošné obsahy rovinných obrazců. Objem tělesa nad množinou $D\in\mathbb{R}^2$ shora ohraničeného grafem spojité funkce $f(x,y)$ je

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Plošný obsah množiny D je

$$\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

10.13. Pomocí dvojného integrálu vypočtěme plošný obsah obrazce, který leží v I. kvadrantu a je ohraničený grafy funkcí $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, a $y=3$.

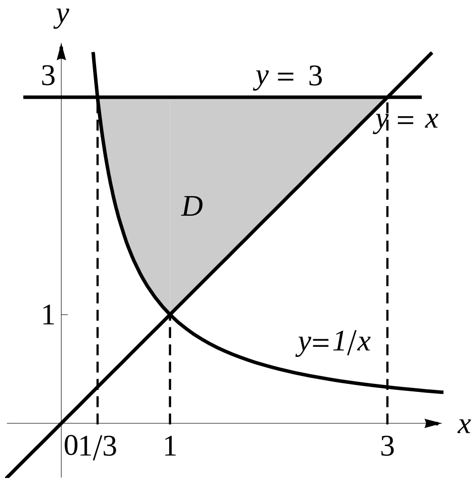
Řešení: Určíme průsečíky křivek a obrazec nakreslíme, viz obr. 10.4. Odtud vidíme, že

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad y=\langle 1,3\rangle,\quad \frac{1}{y}\le x\le y\}$

je množinou 2. typu. Plošný obsah množiny D je

$$P=\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^3\left(\int_{\frac{1}{y}}^{y}1\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\int_1^3\left(y-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{y^2}{2}-\ln|y|\right]_1^3=4-\ln 3.$$



Obr. 10.4

Poznamenejme, že v tomto případě bychom mohli množinu D chápat jako sjednocení dvou množin 1.typu:

$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{1}{3}\le x\le 1\,,\ \frac{1}{x}\le y\le 3\}$, $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 1\le x\le 3\,,\ x\le y\le 3\}$.

Plošný obsah obrazce je pak součtem dvojných integrálů přes množiny D_1 a D_2. ♡

$\diamondsuit$ Vypočtěte plošný obsah omezeného obrazce, který je ohraničený grafy daných funkcí a přímek.

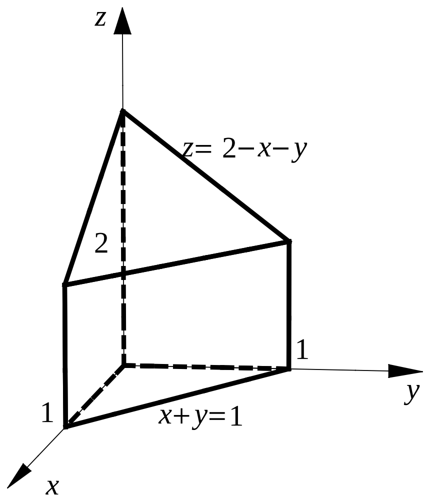
10.14. **a)** $y = \frac{1}{x},\ y = 2,\ x = 2.$ **b)** $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 0,\ x = 0.$
c) $y = x^2,\ y = 2 - |x|.$ **d)** $y = \frac{2}{1+x^2},\ y = x^2.$

10.15. Vypočtěme objem tělesa, které je vymezeno následujícími plochami
$z = 2 - x - y\,, \quad x + y = 1\,, \quad x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = 0\,.$

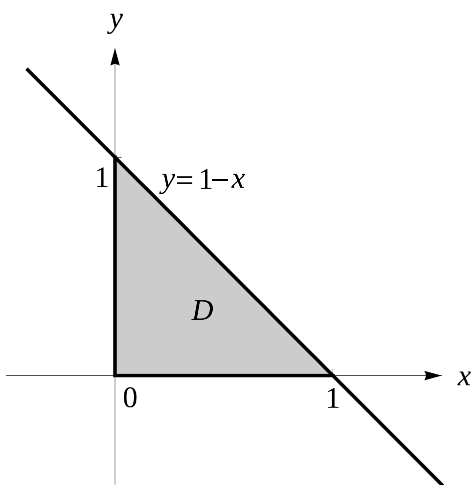
Řešení: Nejdříve si znázorníme těleso, jehož objem budeme počítat. Roviny $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ rozdělují prostor $\mathbb{R}^3$ na osm oktantů. Plocha $x + y = 1$ je rovina rovnoběžná s osou z, která protíná rovinu $z = 0$ v přímce procházející body $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$. Plocha $z = 2 - x - y$ je rovina, kterou osa z protíná v bodě $(0, 0, 2)$. Průsečnice $z = 2 - x - y$ a $x + y = 1$ je přímka procházející body $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$. Přesvědčíme se o tom vyřešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 1 \\ z &=& 2 - x - y \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x &=& 1 - t \\ y &=& t \\ z &=& 1 \end{array}\quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Těleso je sestrojené nad trojúhelníkem D viz obrázek 10.6 a shora omezené grafem funkce $f(x, y) = 2 - x - y$, viz obr. 10.5.



Obr. 10.5



Obr. 10.6

Objem tělesa tedy je

$$V = \iint\limits_D (2 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \text{kde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0, 1\rangle,\ 0 \le y \le 1 - x\}.$$

Integrál vypočteme:

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$$V = \iint\limits_D (2-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} (2-x-y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[2y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2 - 2x - x + x^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2} - 2x + \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x - x^2 + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

♡

♢ V následujících příkladech vypočtěte objem tělesa ohraničeného danými plochami.

10.16. **a)** $6x + 3y + 2z = 6,\ \ x = 0\,,\ \ y = 0$ a $z = 0$.

b) $z = 1$ a $z^2 = x^2 + y^2$.

c) $z = 0$ a $z = 1 - x^2 - y^2$.

d) $x^2 + y^2 = 1$ a $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

e) $z = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$, $y = 3$ a $z = xy$.

f) $z = 1 - x^2 - y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$).

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a $x^2 + y^2 = 3z$.

h) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a $(x-1)^2 + y^2 = 1$, uvažujte těleso v podprostoru $x \geq 0$.

10.5 Nevlastní integrál

Integračním oborem může být celá rovina nebo množina, která není omezená. Postup výpočtu dvojného integrálu přes takovou množinu ukážeme na následujícím příkladě.

10.17. Vypočtěme dvojný integrál

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Řešení: Provedeme substituci do polárních souřadnic. Množina $H = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2;\ r \in (0,\infty),\ \varphi \in \langle 0, 2\pi)\}$ se zobrazí na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tedy

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_H \frac{r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Funkce $\frac{r}{(1+r^2)^2}$ je na množině H omezená, můžeme použít větu o výpočtu nevlastních integrálů (věta 10.37 v [MII]).

$$\iint\limits_H \frac{r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \ = \ \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \left(\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi \right) \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{2r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r \right) =$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+r^2)}\right]_0^a = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{(1+a^2)}+\frac{1}{2}\right) = \\
&= 2\pi\left(0+\frac{1}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}
$$
♡

◇ V následujících příkladech vypočtěte nevlastní integrály.

10.18. a) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{(4+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geq 0\}$.

b) $\displaystyle\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D=\mathbb{R}^2$.

c) $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\in\langle 0,1\rangle\}$.

d) $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq 0\wedge y\geq 0\}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

11 Křivkový integrál skalárního pole

V této kapitole se předpokládá znalost parametrizací rovinných křivek, viz Matematika I. Rovněž je potřeba znát metody výpočtu určitého integrálu. V prvním odstavci se věnujeme křivkám v prostoru a jejich orientaci. Ve druhém odstavci počítáme křivkový integrál skalárního pole. Potřebnou teorii čtenář nalezne ve skriptech [MII], kapitola 11.

11.1 Křivky v prostoru a jejich orientace

Předpokládejme, že zobrazení $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^3$, tj. $\boldsymbol{r}(t) = (\, f_1(t), f_2(t), f_3(t)\,)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, má následující vlastnosti: souřadnicové funkce $f_i \in C^1(I)$, $i = 1, 2, 3$, a derivace zobrazení $\vec{r}\,'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \neq (0, 0, 0)$ pro všechna t z intervalu I. Potom množinu bodů $\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{R}^3;\ X = \boldsymbol{r}(t),\, t \in I\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = f_1(t),\, y = f_2(t),\, z = f_3(t),\, t \in I\}$ nazveme hladkou křivkou v prostoru. Zobrazení $\boldsymbol{r}$ se nazývá *parametrizace* hladké křivky $\mathcal{K}$ a proměnná t *parametr*. Rovnice

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad t \in I,$$

nazýváme *parametrickými rovnicemi* hladké křivky $\mathcal{K}$. Rovinnou křivku nyní chápeme jako speciální případ křivky v prostoru, kdy $f_3(t) = 0$ pro všechna $t \in I$.

Je-li navíc zobrazení $\boldsymbol{r} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ prosté, nazýváme křivku $\mathcal{K}$ obloukem. Oblouk $\mathcal{K}$ je orientován pomocí parametrizace $\boldsymbol{r}$ ve směru rostoucího parametru, jestliže krajní bod $\boldsymbol{r}(a)$ je počáteční bod (*p.b.*) oblouku a druhý krajní bod $\boldsymbol{r}(b)$ je koncový bod (*k.b.*) oblouku. Říkáme krátce, že oblouk je *orientován souhlasně s parametrizací*. Křivka $\mathcal{K}$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.

11.1. Mějme dánu orientovanou úsečku s počátečním bodem $A = (-2, 2, 0)$ a koncovým bodem $B = (3, 1, 3)$. Napišme parametrizaci této úsečky, která bude souhlasná se zadanou orientací.

Řešení: Směrový vektor úsečky má souřadnice $\vec{v} = (B - A) = (3 - (-2), 1 - 2, 3 - 0) = (5, -1, 3)$. Vektorová rovnice úsečky s počátečním bodem A a koncovým bodem B je $X = A + t\,\vec{v}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Tedy parametrické rovnice dané úsečky jsou:

$$x = -2 + 5t,\ \ y = 2 - t,\ \ z = 3t,\ \ t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Úsečka je obrazem intervalu $\langle 0, 1\rangle$ při zobrazení $\boldsymbol{r}(t) = (-2+5t,\ 2-t,\ 3t)$. Přesvědčme se, že orientace úsečky pomocí parametrizace $\boldsymbol{r}$ ve směru rostoucího parametru je souhlasná s orientací danou v zadání úlohy. Vypočtěme: $\boldsymbol{r}(0) = (-2, 2, 0)$ a $\boldsymbol{r}(1) = (3, 1, 3)$. Tedy $\boldsymbol{r}(0) = A$ a $\boldsymbol{r}(1) = B$. ♡

◇ Napište parametrizaci orientovaných úseček s daným počátečním a koncovým bodem, která bude souhlasná se zadanou orientací.

11.2. **a)** $p.b. = (10, 2, 1)$, $k.b. = (8, 3, 4)$. **b)** $p.b. = (2, -1)$, $k.b. = (2, 6)$.
c) $p.b. = (-1, 0, 5)$, $k.b. = (2, 0, 3)$. **d)** $p.b. = (1, 3)$, $k.b. = (0, -1)$.

Parametrické rovnice kružnice v rovině se středem $S = (0,0)$ a poloměrem $r > 0$ jsou například:

$$1)\quad x = r\sin t,\quad y = r\cos t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \qquad 2)\quad x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Kružnice orientovaná souhlasně s parametrizací $\boldsymbol{r}_1(t) = (r\sin t,\, r\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, je probíhána ve směru hodinových ručiček (tj. je orientována záporně). Naopak kružnice orientovaná souhlasně s parametrizací $\boldsymbol{r}_2(t) = (r\cos t,\, r\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, je probíhána proti směru hodinových ručiček (tj. je orientována kladně).

11.3. Napišme parametrizaci orientované půlkružnice se středem $S = (2,0)$, počátečním bodem $A = (-1,0)$, koncovým bodem $B = (5,0)$, ležící v polorovině $y \geq 0$. Přesvědčme se, že tato parametrizace definuje stejnou orientaci půlkružnice jako je zadaná orientace.

Řešení: Vypočtěme poloměr půlkružnice: $r = ||(S - A)|| = ||(3,0)|| = 3$. Půlkružnice je částí záporně orientované kružnice se středem $S = (2,0)$ a poloměrem $r = 3$. Parametrické rovnice této kružnice jsou:

$$x = 2 + 3\sin t, \quad y = 3\cos t, \quad t \in \langle -\pi, \pi\rangle,$$

kde interval $\langle -\pi, \pi\rangle$ je jeden z možných. Pro půlkružnici, která leží v polorovině $y \geq 0$, musí platit $3\cos t \geq 0$. Nerovnost platí pro t z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Parametrizace orientované půlkružnice je

$$\boldsymbol{r}(t) = (2 + 3\sin t,\, 3\cos t), \quad t \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$

Vypočtěme nakonec souřadnice krajních bodů: $\boldsymbol{r}(-\frac{\pi}{2}) = (2-3, 0) = (-1,0) = A$ a $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{2}) = (2+3, 0) = (5,0) = B$. ♡

11.4. Napišme parametrizaci elipsy $\mathcal{K}$ se středem $S = (0,0,0)$, hlavní poloosou o délce $a = 5$ a vedlejší poloosou o délce $b = 2$, která leží v rovině yz a je orientována kladně. Přesvědčme se, že tato parametrizace definuje stejnou orientaci elipsy jako je zadaná orientace.

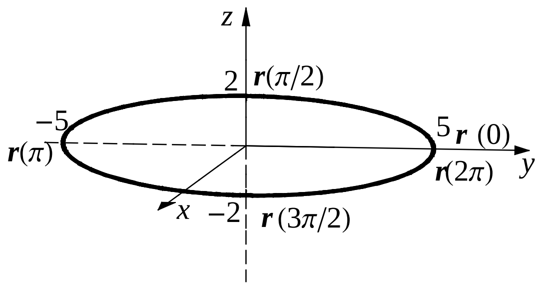
Řešení: Analogicky jako pro kružnici jsou parametrické rovnice kladně orientované elipsy ležící v rovině yz (tj. $x = 0$) se středem $S = (0,0,0)$, hlavní a vedlejší poloosou délky $a, b > 0$:

$$x = 0, \quad y = a\cos t, \quad z = b\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Parametrické rovnice dané elipsy $\mathcal{K}$ jsou:

$$x = 0, \quad y = 5\cos t, \quad z = 2\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$

tj. parametrizace elipsy $\mathcal{K}$ je $\boldsymbol{r}(t) = (0,\, 5\cos t,\, 2\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Ztotožněme parametr t s velikostí úhlu, který svírá kladná část osy y a průvodič OP, $O = (0,0,0)$ je počátek soustavy souřadnic a $P = \boldsymbol{r}(t)$. Vypočtěme pro kontrolu postupně souřadnice bodů, které odpovídají hodnotám parametrů $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$: $\boldsymbol{r}(0) = (0,5,0)$, $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{2}) = (0,0,2)$,



Obr. 11.1

$\boldsymbol{r}(\pi) = (0,-5,0)$, $\boldsymbol{r}(\frac{3}{2}\pi) = (0,0,-2)$ a $\boldsymbol{r}(2\pi) = (0,5,0)$. Z obrázku 11.1 je vidět, že se bod s rostoucím parametrem pohybuje po elipse $\mathcal{K}$ v kladném smyslu. ♡

◇ Napište parametrizaci následujících orientovaných rovinných křivek. Parametrizaci volte tak, aby definovala stejnou orientaci křivky jako je zadaná orientace. Křivku nakreslete a šipkou naznačte orientaci.

11.5. **a)** Kružnice je orientovaná kladně, $S = (0,0)$, $r = 2$.

b) Kružnice je orientovaná záporně, $S = (0,0)$, $r = 1$.

c) Elipsa je orientovaná záporně, $S = (0,0)$, $a = 7$, $b = 3$.

d) Elipsa je orientovaná kladně, $S = (0,0)$, $a = 2$, $b = 3$.

e) Kružnice je orientovaná záporně, $S = (2,1)$, $r = 3$.

f) Kružnice je orientovaná kladně, $S = (-1,0)$, $r = 1$.

g) Elipsa je orientovaná kladně, $S = (3,-2)$, $a = 4$, $b = 1$.

h) Elipsa je orientovaná záporně, $S = (0,1)$, $a = 1$, $b = 6$.

◇ Napište parametrizaci následujících orientovaných oblouků v rovině. Parametrizaci volte tak, aby definovala stejnou orientaci oblouku jako je zadaná orientace. Oblouk nakreslete a šipkou naznačte orientaci.

11.6. **a)** Půlkružnice orientovaná kladně, $S=(0,0)$, $p.b.=(2,0)$, $k.b.=(-2,0)$.

b) Půlkružnice orientovaná záporně, $S=(0,0)$, $p.b.=(1,0)$, $k.b.=(-1,0)$.

c) Část elipsy orientovaná záporně, $S=(0,0)$, $p.b.=(0,3)$, $k.b.=(0,-3)$, $a = 7$.

d) Část elipsy orientovaná kladně, $S=(0,0)$, $p.b.=(0,3)$, $k.b.=(0,-3)$, $a = 2$.

e) Půlkružnice: $S=(2,1)$, $p.b.=(2,-2)$, $k.b.=(2,4)$, leží v polorovině $x \leq 2$.

f) Půlkružnice: $S = (-1,0), p.b. = (-1,-1), k.b. = (-1,1)$, leží v p. $x \geq -1$.

g) Část elipsy: $S=(3,-2)$, $p.b.=(-1,-2)$, $k.b.=(7,-2)$, $b=1$, leží v p. $y \leq -2$.

h) Část elipsy: $S=(0,1)$, $p.b.=(-1,1)$, $k.b.=(1,1)$, $b = 6$, leží v polor. $y \geq 1$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

$\diamondsuit$ Napište parametrizaci následujících orientovaných čtvrtkružnic se středem $S = (0, 0)$. Parametrizaci volte tak, aby definovala stejnou orientaci čtvrtkružnice jako je zadaná orientace. Čtvrtkružnici nakreslete a šipkou naznačte orientaci.

11.7. **a)** $r = 4$, orientovaná záporně, leží v II. kvadrantu.

b) $r = 1$, orientovaná kladně, leží ve IV. kvadrantu.

c) $p.b. = (0, 2)$, leží v I. kvadrantu.

d) $p.b. = (0, 5)$, leží v II. kvadrantu.

11.8. Ověřme, že křivka $\mathcal{K}$ zadaná parametrickými rovnicemi

$$x = t^2, \quad y = 4 - t, \quad z = 1 - t^2, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle,$$

je hladká. Rozhodněme, zda je uzavřená a jednoduchá. Napišme parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě $T = (0, 4, 1)$.

Řešení:

1. Souřadnicové funkce zobrazení $\boldsymbol{r}(t) = (t^2,\, 4 - t,\, 1 - t^2)$ jsou spojité a mají spojité derivace na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Derivace zobrazení $\vec{r}\,'(t) = (2t,\, -1,\, -2t) \neq (0, 0, 0)$ pro všechna $t \in \langle -1, 1 \rangle$. Křivka $\mathcal{K}$ je hladká.

2. Vypočtěme souřadnice bodů: $\boldsymbol{r}(-1) = (1, 5, 0)$ a $\boldsymbol{r}(1) = (1, 3, 0)$. Protože $\boldsymbol{r}(-1) \neq \boldsymbol{r}(1)$, křivka $\mathcal{K}$ není uzavřená. Je-li zobrazení $\boldsymbol{r}(t)$ prosté na $\langle -1, 1 \rangle$, nazývá se křivka $\mathcal{K}$ *jednoduchá*. Zobrazení $\boldsymbol{r}(t)$ je prosté, jestliže pro každé $t_1, t_2 \in \langle -1, 1 \rangle$, $t_1 \neq t_2$, je $\boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$. Dokážeme ekvivalentní implikaci: $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2) \implies t_1 = t_2$. Nechť

$$\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2), \text{ tj. } (t_1^2,\, 4 - t_1,\, 1 - t_1^2) = (t_2^2,\, 4 - t_2,\, 1 - t_2^2).$$

Tedy dvojice t_1, t_2 je řešením soustavy:

$$\begin{aligned} t_1^2 &= t_2^2 \\ 4 - t_1 &= 4 - t_2 \\ 1 - t_1^2 &= 1 - t_2^2 \\ \hline \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} t_1 &= \pm t_2 \\ t_1 &= t_2 \qquad \implies \qquad t_1 = t_2. \\ t_1 &= \pm t_2 \end{aligned}$$

Tedy zobrazení $\boldsymbol{r}(t)$ je prosté na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Křivka $\mathcal{K}$ je jednoduchá.

3. Tečný vektor $\vec{r}\,'(t) = (2t,\, -1,\, -2t)$ ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě $P = \boldsymbol{r}(t)$ je směrový vektor tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě P. Určeme hodnotu parametru t, kterému odpovídá bod $T = (0, 4, 1)$. Z rovnosti $(0, 4, 1) = (t^2,\, 4 - t,\, 1 - t^2)$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$ plyne $t = 0$. Tečný vektor v bodě T má souřadnice $\vec{\boldsymbol{r}}\,'(0) = (0,\, -1,\, 0)$. Parametrické rovnice tečny ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě T jsou

$$x = 0, \quad y = 4 - s, \quad z = 1, \quad s \in \mathbb{R}. \qquad \heartsuit$$

$\diamondsuit$ Rozhodněte, zda je křivka $\mathcal{K}$ zadaná následujícími parametrickými rovnicemi hladká, jednoduchá, uzavřená. (Je-li zobrazení $\boldsymbol{r}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ prosté na otevřeném intervalu (a, b) a $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, nazývá se křivka $\mathcal{K}$ zadaná parametrizací $\boldsymbol{r}$ jednoduchá uzavřená.)

11.9. **a)** $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
b) $x = t,\ y = \sqrt[3]{t},\ t \in \langle -8, 8\rangle$.
c) $x = 2\sin t,\ y = \cos 2t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle$.
d) $x = t,\ y = \sin t,\ z = \cos t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
e) $x = |t|,\ y = t,\ z = 1 - t,\ t \in \langle -1, 1\rangle$.
f) $x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \sin \frac{t}{2},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

$\diamondsuit$ Následujícími parametrickými rovnicemi je zadaná křivka $\mathcal{K}$. Napište parametrické rovnice tečny τ ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě T. Křivku a tečnu nakreslete.

11.10. **a)** $x = 4\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ \ T = (2, -\sqrt{3})$.
b) $x = 2t^2,\ y = 1 - t,\ t \in \langle 0, \frac{3}{2}\rangle,\ \ T = (2, 0)$.
c) $x = \sqrt{t} - 1,\ y = \frac{2}{\sqrt{t}},\ t \in \langle 1, 16\rangle,\ \ T = (1, 1)$.
d) $x = 1,\ y = \cos t,\ z = \sin t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle,\ \ T = (1, 0, 1)$.
e) $x = 1 - 3t,\ y = 2,\ z = 2t,\ t \in \langle -1, 1\rangle,\ \ T = (1, 2, 0)$.
f) $x = 3\sin t,\ y = 3\cos t,\ z = t,\ t \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle,\ \ T = (3, 0, \frac{\pi}{2})$.

11.2 Křivkový integrál skalárního pole

Předpokládejme, že křivka $\mathcal{K}$ je zadaná parametrizací $\boldsymbol{r}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ a že reálná funkce f tří proměnných je definovaná a spojitá na křivce $\mathcal{K}$. Funkce f se často v aplikacích nazývá *skalární pole* na křivce $\mathcal{K}$. Pak křivkový integrál skalárního pole f po křivce $\mathcal{K}$ vypočteme pomocí vzorce:

$$\int_{\mathcal{K}} f \,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \cdot ||\vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)|| \,\mathrm{d}t\,,$$

který výpočet křivkového integrálu převádí na výpočet určitého integrálu funkce jedné proměnné. Křivkový integrál skalárního pole po rovinné křivce se vypočte analogicky.

11.11. Vypočtěme $\int_{\mathcal{K}} (x + y + z)\,\mathrm{d}s$, kde $\mathcal{K}$ je úsečka s krajními body $A = (1, 2, 0)$ a $B = (3, 1, 2)$.

Řešení: Poznamenejme, že křivkový integrál skalárního pole po křivce $\mathcal{K}$ nezávisí na orientaci křivky. Parametrizace úsečky AB je

$$\boldsymbol{r}(t) = (1 + 2t,\ 2 - t,\ 2t),\ t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Funkci $f(x,y,z) = x+y+z$ složíme se zobrazením $\boldsymbol{r}$:

$$f(\boldsymbol{r}(t)) = 1 + 2t + 2 - t + 2t = 3 + 3t\,.$$

Dále vypočteme velikost tečného vektoru $\vec{\boldsymbol{r}}\,'(t) = (2,-1,2)$:

$$||\vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)|| = \sqrt{4+1+4} = 3\,.$$

Po dosazení do vzorce dostaneme

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (x+y+z)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (3+3t)\cdot 3\,\mathrm{d}t = 9\left[t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{27}{2}\,. \qquad \heartsuit$$

<u>Poznámka</u>: Funkce $f(x,y,z) = x+y+z$ je na úsečce AB kladná. Tedy můžeme ji interpretovat jako *lineární hustotu* hmotné křivky (drát). Pak číslo $\int\limits_{\mathcal{K}} (x+y+z)\,\mathrm{d}s = \frac{27}{2}$ má význam hmotnosti křivky $\mathcal{K}$.

11.12. Vypočtěme hmotnost křivky $\mathcal{K}$, která tvoří obvod poloviny kruhu ležícího v polorovině $y \geq 0$, se středem $S = (0,0)$ a poloměrem $r = 2$, je-li lineární hustota v každém bodě křivky dána funkčním předpisem $f(x,y) = x^2y$.

Řešení: Uzavřená křivka $\mathcal{K}$ je sjednocením dvou oblouků: půlkružnice $\mathcal{K}_1$ a úsečky $\mathcal{K}_2$ s krajními body $A = (2,0)$ a $B = (-2,0)$. Hmotnost křivky je tedy dána součtem křivkových integrálů:

$$m = \int\limits_{\mathcal{K}_1} x^2y\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\mathcal{K}_2} x^2y\,\mathrm{d}s\,.$$

Parametrizace oblouků je:

$$\mathcal{K}_1:\ \boldsymbol{r}_1(t) = (2\cos t,\ 2\sin t),\ t \in \langle 0,\pi\rangle,$$

$$\mathcal{K}_2:\ \boldsymbol{r}_2(t) = (t,0),\ t \in \langle -2,2\rangle,$$

tudíž

$$\vec{\boldsymbol{r}}_1\,'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t), \quad ||\vec{\boldsymbol{r}}_1\,'(t)|| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2,$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_2\,'(t) = (1,0), \quad ||\vec{\boldsymbol{r}}_2\,'(t)|| = 1.$$

Po dosazení do vzorce dostáváme

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} x^2y\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^{\pi} (2\cos t)^2\cdot 2\sin t\cdot 2\,\mathrm{d}t = -2\left[\frac{(2\cos t)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{32}{3},$$

$$\int\limits_{\mathcal{K}_2} x^2y\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-2}^{2} t^2\cdot 0\cdot 1\,\mathrm{d}t = 0.$$

Hmotnost křivky je $m = \dfrac{32}{3} + 0 = 10\frac{2}{3}$. $\heartsuit$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

◇ Vypočtěte křivkový integrál $I=\int_{\mathcal{K}} f\,\mathrm{d}s$ následujících skalárních polí f po dané křivce $\mathcal{K}$.

11.13. a) $f(x,y)=y$; $\mathcal{K}$ je oblouk paraboly $x=y^2$ s krajními body $A=(1,-1)$ a $B=(0,0)$.

b) $f(x,y)=x\sqrt{1+y^2}$; $\mathcal{K}$ je graf funkce $y=\mathrm{e}^x$, $x\in\langle 0,1\rangle$.

c) $f(x,y)=x\sin y$; $\mathcal{K}$ je úsečka s krajními body $A=(1,0)$ a $B=(-3,3)$.

d) $f(x,y)=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$; $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A=(1,1)$, $B=(3,2)$, $C=(1,2)$.

e) $f(x,y)=x^2$; $\mathcal{K}$ je půlkružnice se $S=(0,0)$, s krajními body $A=(3,0)$ a $B=(-3,0)$, ležící v polorovině $y\geq 0$.

f) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z)^3$; $\mathcal{K}$ je závit šroubovice $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\frac{t}{2}$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$.

g) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$; $\mathcal{K}$ je zadaná parametrickými rovnicemi $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$, $z=\mathrm{e}^{-t}$, $t\in\langle -1,0\rangle$.

h) $f(x,y,z)=xyz$; $\mathcal{K}$ je zadaná parametrickými rovnicemi $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\cos 2t$, $t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$.

◇ Vypočtěte hmotnost následujících křivek $\mathcal{K}$, je-li lineární hustota v každém bodě křivky dána funkcí f.

11.14. a) $\mathcal{K}$ je graf funkce $y=\ln x$, $x\in\langle 1,\mathrm{e}\rangle$; $f(x,y)=2y\sqrt{x^2+1}$.

b) $\mathcal{K}$ je obvod parabolické výseče ohraničené křivkami $y=(x-2)^2$ a $y=4$; $f(x,y)=\sqrt{1+4y}$.

c) $\mathcal{K}$ je oblouk paraboly $x=\dfrac{y^2}{2}$, $y\in\langle -1,1\rangle$; $f(x,y)=|y|$.

d) $\mathcal{K}$ je část elipsy $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ležící v I. kvadrantu; $f(x,y)=xy$.

e) $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A=(1,0,2)$, $B=(0,-1,1)$, $C=(2,-3,0)$; $f(x,y,z)=x+y^2+z$.

f) $\mathcal{K}$ je polovina závitu šroubovice $x=\cos t$, $y=3t$, $z=\sin t$, $t\in\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$; $f(x,y,z)=xyz$.

g) $\mathcal{K}$ je zadaná parametrickými rovnicemi $x=t^2$, $y=4+t$, $z=1-t^2$, $t\in\langle -1,1\rangle$; $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{\sqrt{8x+1}}$.

h) $\mathcal{K}$ je zadaná parametrickými rovnicemi $x=2\sin t$, $y=\cos t$, $z=\sqrt{2}\,t$, $t\in\langle 0,\pi\rangle$; $f(x,y,z)=xz\sqrt{y^2+1}$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

12 Křivkový integrál vektorového pole. Práce

V této kapitole se zabýváme integrálem vektorového pole po zadané křivce. S jeho pomocí lze například vypočítat práci, kterou vykoná silové pole působením po dané křivce. V případě, že je vektorové pole potenciální, lze výpočet křivkového integrálu po křivce často významně zjednodušit. Teorii prostorových (rovinných) křivek nalezneme ve skriptech [MII] na začátku kapitoly 11. Teorii ke křivkovému integrálu a potenciálu nalezneme v kapitole 12 tamtéž.

Pro účely této kapitoly sjednotíme používané označení pro množinu bodů $\mathbb{E}^3$ ($\mathbb{E}^2$) a množinu vektorů $\mathbb{V}^3$ ($\mathbb{V}^2$) pod společné označení $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$). Pro lepší čitelnost však budeme rozlišovat dvojí interpretaci prvků z $\mathbb{R}^3$: body zapisované ve tvaru $X = [x_1, x_2, x_3]$ a vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (obdobně v $\mathbb{R}^2$). Všechny vektory zde budeme zapisovat jako vektory řádkové.

12.1 Výpočet křivkového integrálu vektorového pole

Nechť $\mathcal{K}$ je hladká orientovaná křivka v $\mathbb{R}^3$, na níž je definováno spojité vektorové pole $\vec{F} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Nechť $r : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, je parametrizace křivky $\mathcal{K}$. Nechť

$$\vec{r}\,'(t) = (x\,'(t),\, y\,'(t),\, z\,'(t))\,, \quad \vec{r}\,'(t) \neq (0,0,0)\ \forall\, t \in \langle a, b\rangle\,,$$

je tečný vektor ke křivce $\mathcal{K}$ v bodě $r(t)$. Potom křivkový integrál vektorového pole $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{K}$ vypočteme pomocí vzorce

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) dt\,,$$

kde $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, \mathrm{d}z)$ a na pravé straně integrujeme skalární součin vektorů $\vec{F}(r(t))$ a $\vec{r}\,'(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Zapíšeme-li formálně integrand vlevo jako skalární součin vektorů $\vec{F}$ a $\mathrm{d}\vec{r}$, dostaneme diferenciální formu příslušnou vektorovému poli $\vec{F}$. Pomocí této diferenciální formy zapisujeme

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x,y,z)\, \mathrm{d}x + F_2(x,y,z)\, \mathrm{d}y + F_3(x,y,z)\, \mathrm{d}z\,,$$

a hovoříme o **integraci diferenciální formy** po křivce $\mathcal{K}$. Analogicky postupujeme v případě rovinných vektorových polí.

12.1. Vypočtěme křivkový integrál $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\vec{F}(x,y,z) = (yz,\, xz,\, xyz)$ a integrační cesta $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ je úsečka spojující body $P = [0,0,0]$ a $Q = [1,1,2]$, přičemž bod P je počáteční bod křivky $\mathcal{C}$.

Řešení: Vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = (yz,\, xz,\, xyz)$ je spojité v $\mathbb{R}^3$. Orientovanou úsečku $\mathcal{C} = \overrightarrow{PQ}$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizujme souhlasně s její orientací například:

$$r(t) = [0,0,0] + t([1,1,2] - [0,0,0]) = [t, t, 2t]\,, \qquad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Vypočteme vektory $\vec{r}\,'(t)$ a $\vec{F}(r(t))$:

$$\vec{r}\,'(t) = (1,1,2)\ , \quad \vec{F}(r(t)) = \left(2t^2, 2t^2, 2t^3\right)\ .$$

Po dosazení do daného integrálu dostaneme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_0^1 \left(2t^2\cdot 1 + 2t^2\cdot 1 + 2t^3\cdot 2\right)\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_0^1 (t^2+t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{7}{3}\ .$$

♡

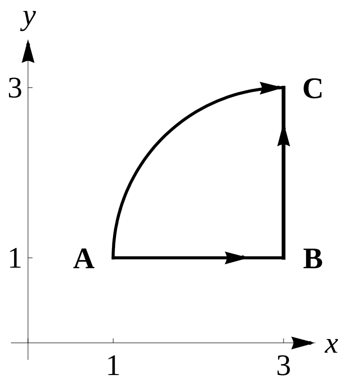
12.2. Integrujme diferenciální formu $\int\limits_{\mathcal{K}} y\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}y$, je-li integrační cestou

a) součet orientovaných úseček $\overrightarrow{AB} \dotplus \overrightarrow{BC}$,

b) čtvrtkružnice $\mathcal{K}$ o středu B a poloměru $R = 2$ s počátečním bodem A a koncovým bodem C ,

kde $A = [1,1],\ B = [3,1],\ C = [3,3]$.

Řešení:



Obr. 12.1

a) Úsečku $\overrightarrow{AB}$ budeme parametrizovat např. takto:

$$r(t) = [\,t, 1\,]\ ,\ t\in\langle 1,3\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = (1,0)\ .$$

Pro úsečku $\overrightarrow{BC}$ volíme parametrizaci:

$$r(t) = [\,3, t\,]\ ,\ t\in\langle 1,3\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = (0,1)\ .$$

Nyní integrujeme

$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}\dotplus\overrightarrow{BC}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\overrightarrow{BC}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_1^3 (1\cdot 1 - t\cdot 0)\mathrm{d}t + \int\limits_1^3 (t\cdot 0 - 3\cdot 1)\mathrm{d}t = \int\limits_1^3 -2\,\mathrm{d}t = -4\ .$$

b) Pro čtvrtkružnici $\mathcal{K}$ se středem v $[3,1]$ a poloměru $R = 2$ je nejlépe zvolit parametrizaci polárními souřadnicemi:

$$r(t) = [\,2\cos t + 3\ ,\ 2\sin t + 1\,]\ ,\ t\in\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)\ .$$

Jelikož je $\mathcal{K}$ orientovaná v záporném smyslu (po směru hodinových ručiček), zvolená parametrizace r bude souhlasná s orientací křivky $-\mathcal{K}$. Tedy

$$\int\limits_{\mathcal{K}} y\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}y = -\int\limits_{-\mathcal{K}} y\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}y = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ((\,2\sin t + 1)(-2\sin t) - (2\cos t + 3)(2\cos t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4 + 6\cos t + 2\sin t)\,\mathrm{d}t = [4t + 6\sin t - 2\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\pi - 4\ .$$

♡

12.3. Vypočtěme práci, kterou vykoná silové pole $\vec{F}(x,\, y,\, z) = (\, x,\, y,\, xz - y\,)$ při působení po křivce $\mathcal{K}$ dané parametrizací $r(t) = [\, t^2, 2t,\, 4t^3\,]\,,\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

Řešení: Spojité vektorové pole $\vec{F}(x,\, y,\, z) = (\, x,\, y,\, xz - y\,)$ vykoná práci W, která je rovna křivkovému integrálu podél křivky $\mathcal{K}$, tj.

$$W = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Nejdříve vypočteme vektory: $\vec{r}\,'(t) = (\,2t,\, 2,\, 12t^2)\ ,\ \vec{F}(r(t)) = (\,t^2, 2t, 4t^5 - 2t)\,.$
Nyní vypočítáme práci

$$W = \int_{\mathcal{K}} x\ \mathrm{d}x + y\ \mathrm{d}y + (xz - y)\ \mathrm{d}z = \int_0^1 (2t^3 + 4t + 48t^7 - 24t^3)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (48t^7 - 22t^3 + 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}\,.$$

♡

◊ V následujících příkladech vypočtěte integrál $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ pro zadané pole $\vec{F}$ a křivku $\mathcal{C}$.

12.4. **a)** $\vec{F}(x,y) = (-y^2, x)\,,$ $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $[\,-1, 2\,]$ do bodu $[\,0, 4\,]$.

b) $\vec{F}(x,y) = (-y, x)\,,$ 1) $\mathcal{C}_1$ je úsečka z počátku do bodu $[\,1, 2\,]$.
2) $\mathcal{C}_2$ je část paraboly $y = 2x^2$ z bodu $[\,0, 0\,]$ do $[\,1, 2\,]$.

c) $\vec{F}(x,y) = (-y, x)\,,$ $\mathcal{C}$ je součet orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ} \dot{+} \overrightarrow{QR}$, kde $P = [\,0, 0\,],\ Q = [\,1, 0\,],\ R = [\,1, 2\,]$.

d) $\vec{F}(x,y) = (x^2 - 2xy,\ y^2 - 2xy)\,,$ $\mathcal{C}$ je část paraboly $y = x^2,\ x \in \langle -1, 1\,\rangle$, s počátečním bodem [-1,1].

e) $\vec{F}(x,y) = (2 - y,\ x)\,,$ $\mathcal{C}$ je část oblouku cykloidy daná parametrizací $r(t) = [\,t - \sin t\,,\ 1 - \cos t\,],\ t \in \langle 0, \pi\rangle$, s počátečním bodem $[\,\pi, 2\,]$.

f) $\vec{F}(x,y) = (x + y,\ \sqrt{y})\,,$ $\mathcal{C} = \{[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ s počátečním bodem $[\,0, 1\,]$.

◊ Integrujte diferenciální formu podél zadané křivky.

12.5. **a)** $\int_{\mathcal{K}} (x + y)\ \mathrm{d}x + (y - x)\ \mathrm{d}y\,,$ $\mathcal{C} = \{[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\}$ probíhaná proti směru hodinových ručiček.

b) $\int_{\mathcal{K}} - \,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\,,$ $\mathcal{K}$ je obvod parabolické úseče $-9 \le y \le -x^2$ (tj. část paraboly a úsečka) obíhaný v kladném smyslu.

c) $\int_{\mathcal{C}} -y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}z\,,$ $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dot{+} \mathcal{C}_2$, kde $\mathcal{C}_1$ je dána parametrizací $r(t) = [\cos t, \sin t, t]$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, orientovaná nesouhlasně s rostoucím parametrem t, a $\mathcal{C}_2$ je úsečka spojující koncový bod křivky $\mathcal{C}_1$ s počátečním.

d) $\int_{\mathcal{K}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,,$ $\mathcal{K}$ je kružnice o poloměru R se středem v počátku obíhaná jednou v kladném smyslu.

e) $\int_{\mathcal{K}} x\,\mathrm{d}x - yz\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z\,,$ $\mathcal{K}$, s počátečním bodem v $[0,0,0]$, je dána parametrizací $r(t) = [t^3, -t, t]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, souhlasnou s orientací křivky.

f) $\int_{\mathcal{K}} 3xy\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z\,,$ $\mathcal{K}$ je tvořena orientovaným součtem úseček $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, kde $A = [0,0,0]$, $B = [1,2,1]$, $C = [0,0,1]$.

$\Diamond$ V následujících příkladech vypočítejte práci vykonanou v silovém poli $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{K}$.

12.6. **a)** $\vec{F}(x,y) = (x^2,\, xy)\,,$ $\mathcal{K}$ je záporně orientovaná část elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$, pro kterou $y \ge 0$.

b) $\vec{F}(x,y) = (y^2 - 3,\, x)\,,$ $\mathcal{K}$ je čtvrtkružnice o středu $S = [0,0]$ a poloměru $R = 1$ probíhaná z bodu $[1,0]$ proti směru hodinových ručiček.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)\,,$ $\mathcal{K}$ je závit šroubovice s parametrizací $r(t) = [\cos t, \sin t, 2t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, s počátečním bodem $[1, 0, 4\pi]$.

d) $\vec{F}(x,y) = (y, 2x)\,,$ $\mathcal{K}$ je dána parametrizací $r(t) = [1 + \mathrm{e}^t,\, 1 + 3t]$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, s počátečním bodem $[2,1]$.

e) $\vec{F}(x,y) = (x, y+2)\,,$ $\mathcal{K}$ je uzavřená křivka, probíhaná po směru hodinových ručiček, která se skládá z oblouku cykloidy, daného parametrizací $r(t) = [t - \sin t,\, 1 - \cos t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, a z úsečky spojující koncový bod oblouku cykloidy s počátečním.

f) $\vec{F}(x,y) = (0,\, x)\,,$ $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [2,0]$, $C = [0,3]$. Oběh volte v kladném smyslu.

12.7. Vypočtěte, jakou práci vykonáte, pokud půjdete dokola po kružnici o poloměru R, (tj. $r(t) = [\,R\cos t, R\sin t\,]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$) při větru působící konstantní silou $\vec{F}(x,y) = (a,b)$ (konstantní vektorové pole v rovině).

12.8. Vypočtěte, jaká se vykoná práce v tíhovém poli $\vec{F}(x,y) = (0,\,0,\,-mg)$ při sjezdu tobogánu majícího tvar šroubovice s osou z, o výšce závitu h a poloměru R, z počátečního bodu $[\,R,0,3h\,]$ do koncového bodu $[\,R,0,0\,]$. Šroubovici parametrizujeme $r(t) = [\,R\cos t, R\sin t, \dfrac{h}{2\pi}t\,]$, $t \in \langle 0, 6\pi\rangle$.

12.2 Nezávislost křivkového integrálu vektorového pole na integrační cestě. Integrace totálního diferenciálu

V předchozí části jsme počítali integrál vektorové funkce podél křivky $\mathcal{C}$, aniž bychom vyšetřovali vlastnosti vektorového pole. Nyní nás budou zajímat vektorová pole $\vec{F}$ mající potenciál U, tj. $\vec{F} = \operatorname{grad} U$. Ve fyzice je známo, že v případě potenciálních vektorových polí nezávisí vykonaná práce na volbě křivky $\mathcal{C}$, ale pouze na počátečním a koncovém bodě křivky. V této části budeme zkoumat případy, kdy křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1\ \mathrm{d}x + F_2\ \mathrm{d}y \qquad \left(\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1\ \mathrm{d}x + F_2\ \mathrm{d}y + F_3\ \mathrm{d}z\right),$$

tj. integrace diferenciální formy, nezávisí na cestě, podél které integrujeme.

Definice pojmů **potenciální vektorové pole, potenciál** a **nezávislost na integrační cestě** lze nalézt v části 12.7. [MII]. Tamtéž lze nalézt Věty 12.26 a 12.30, které tvrdí:
Spojité vektorové pole $\vec{F}$ v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2\ (\mathbb{R}^3)$ je potenciální právě tehdy, jestliže

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \ \text{ nezávisí na integrační cestě v oblasti } G.$$

V části 12.8. [MII] je definována **jednoduše souvislá oblast**. Věty 12.33 a 12.36 stanovují nutné a postačující podmínky, za kterých je vektorové pole potenciální:
Spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}$ v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) je potenciální právě tehdy, jestliže v Ω platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},\quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x},\quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}\right).$$

(Analogicky: *Diferenciální forma $F_1\ \mathrm{d}x + F_2\ \mathrm{d}y$ ($F_1\ \mathrm{d}x + F_2\ \mathrm{d}y + F_3\ \mathrm{d}z$) je totálním diferenciálem nějaké funkce U v Ω právě tehdy, jestliže platí uvedené podmínky.*)

Výpočet křivkového integrálu pro $\vec{F}$ potenciální mající potenciál U značně usnadňuje Věta 12.22: *Jestliže $\vec{F}$ je spojité potenciální pole s potenciálem U na oblasti Ω a $\mathcal{K} \subset \Omega$, potom*

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(k.b.\mathcal{K}) - U(p.b.\mathcal{K}),$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

kde $p.b.\,\mathcal{K}$ značí počáteční a $k.b.\,\mathcal{K}$ koncový bod křivky $\mathcal{K}$.

Máme-li tedy integrovat vektorové pole $\vec{F}$ podél zadané křivky $\mathcal{K}$, je vhodné řídit se následujícím postupem:

- Najdeme oblast $G \subset \mathcal{D}(\vec{F})$, kde je $\vec{F}$ definované a spojité. Ověříme, zda $\mathcal{K} \subset G$.
- Pokud jsou splněny nutné a postačující podmínky pro existenci potenciálu U na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset G$ a $\mathcal{K} \subset \Omega$, potom pro výpočet integrálu platí následující implikace

  1. $\mathcal{K}$ je uzavřená $\quad\Rightarrow\quad \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0\,.$
  2. $\mathcal{K}$ není uzavřená, známe funkci U v $\Omega \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(k.b.\,\mathcal{K}) - U(p.b.\,\mathcal{K})\,.$
  3. $\mathcal{K}$ není uzavřená, neznáme $U \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,,$

     kde $\mathcal{L}$ je libovolná, např. "pravoúhlá" integrační cesta spojující $p.b.\,\mathcal{K}$ a $k.b.\,\mathcal{K}$.

- Pokud nejsou splněny nutné a postačující podmínky pro existenci potenciálu U, integrujeme podle vzorce uvedeného v části 12.1. této sbírky, tj. je-li $r(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, parametrizace křivky $\mathcal{K}$, potom
$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt\,.$$

12.9. Ověřme, že funkce $U(x,y,z) = x^2y^3z^4 + 1$ je potenciálem vektorového pole
$$\vec{F} = (2xy^3z^4,\, 3x^2y^2z^4,\, 4x^2y^3z^3)$$
v $\mathbb{R}^3$. Dále vypočtěme křivkový integrál $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde integrační cesta $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ je dána parametrizací $r(t) = [\,2\cos 2t,\, 4\sin t\,, -\sin t]$, $t \in \langle 0, \pi\,\rangle$, s počátečním bodem $[\,2, 0\,,0]$.

Řešení: Funkce U je diferencovatelná v celém prostoru $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{D}(\vec{F}) = \mathbb{R}^3$. Platí
$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^3z^4 = F_1(x,y,z)\,, \quad \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = 3x^2y^2z^4 = F_2(x,y,z)\,,$$
$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 = F_3(x,y,z)\,.$$
Tedy funkce U je v jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{R}^3$ potenciálem pole $\vec{F}$. Integrál $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ nezávisí na integrační cestě $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$, ale pouze na počátečním a koncovém bodě křivky $\mathcal{C}$. Navíc zadaná prostorová křivka je uzavřená, neboť
$$p.b.\ \mathcal{C} = r(0) = [\,2,\ 0\,,0] = r(\pi) = k.b.\ \mathcal{C}\,.$$

Podle věty 12.27 [MII] je tedy

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0\,.$$

Vzhledem k tomu, že je zadaná křivka uzavřená, nemuseli jsme pro výpočet integrálu znát předpis funkce U. Stačilo vědět, že potenciál U vektorového pole $\vec{F}$ existuje. ♡

12.10. Určeme oblasti, v nichž je definováno vektorové pole

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-1}{(x-y)^2},\, \frac{1}{(x-y)^2} \right),$$

a ověřme, že funkce $U(x,y,z) = \dfrac{1}{x-y}$ je v těchto oblastech potenciálem vektorového pole $\vec{F}$. Potom vypočtěme integrál $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, má-li křivka $\mathcal{C}$ počáteční bod A a koncový bod B.

a) $A = [\,1,\,2\,]$, $B = [\,-1,\,1\,]$, **b)** $A = [\,-1,\,2\,]$, $B = [\,4,\,1\,]$.

Řešení: Nejdříve stanovíme definiční oblasti pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$. Zřejmě jsou funkce $F_1(x,y) = \dfrac{-1}{(x-y)^2}$ i $F_2 = -F_1$ spojité ve všech bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které $x \neq y$, tedy vektorové pole $\vec{F}$ je definováno v oblastech

$$G_1 = \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y > x\} \quad \text{a} \quad G_2 = \{\,[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y < x\}\,.$$

Platí $\mathcal{D}(\vec{F}) = G_1 \bigcup G_2$. Funkce U je v obou oblastech G_1 i G_2 diferencovatelná a platí

$$\operatorname{grad} U(x,y) = \left(\frac{-1}{(x-y)^2},\, \frac{1}{(x-y)^2} \right) = \vec{F}(x,y)\,.$$

Tedy funkce U je v G_1 i v G_2 potenciálem pole $\vec{F}$. Integrál $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ nebude tudíž záviset na integrační cestě, pouze na *p.b.* $\mathcal{C}$ a *k.b.* $\mathcal{C}$. Jediná podmínka kladená na integrační cestu je, aby celá cesta (tedy i oba body, koncový i počáteční) ležela v jedné vybrané oblasti: G_1 nebo G_2 .

Nyní budeme integrovat.

a) Zřejmě oba body, počáteční $A = [\,1,2\,]$ i koncový $B = [\,-1,1\,]$, leží v oblasti G_1. Tedy

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(B) - U(A) = \frac{1}{-1-1} - \frac{1}{1-2} = \frac{1}{2}\,.$$

b) Zadané body leží v různých oblastech: $A = [\,-1,\,2\,] \in G_1$ a $B = [\,4,\,1\,] \in G_2$. V tomto případě integraci nelze provést. Vektorové pole není definované, tj. ani spojité, na žádné křivce z bodu A do bodu B. ♡

12.11. Ověřme, že integrál

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (4x^2 - 2y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{1+y^2} - 2x\right)\mathrm{d}y$$

nezávisí na integrační cestě v $\mathbb{R}^2$. Vypočtěme jeho hodnotu, je-li $\mathcal{K}$ křivka s počátečním bodem $A = [-1, 1\,]$ a koncovým bodem $B = [\,3, -1\,]$.

Řešení: Vektorové pole $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(4x^2 - 2y, \dfrac{1}{1+y^2} - 2x\right)$ je definované a spojitě diferencovatelné v $\Omega = \mathbb{R}^2$, tj. na jednoduše souvislé oblasti. Zřejmě je $A \in \Omega\,, B \in \Omega\,.$

Nejprve zjistíme, zda integrál nezávisí na integrační cestě. Ověříme, zda $\vec{F}$ v Ω splňuje nutnou a postačující podmínku (věta 12.33 v [MII]) pro to, aby bylo potenciální. Protože platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \qquad \forall\,[\,x,y\,] \in \Omega\,,$$

je pole potenciální. Neznáme sice jeho potenciál, můžeme však integrovat po libovolné cestě z bodu A do bodu B. Ukážeme, že pro integraci je výhodné zvolit "pravoúhlou" integrační cestu. Např. volíme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2\,, \quad \mathcal{L} \subset \Omega = \mathbb{R}^2\,,$$

kde úsečku $\mathcal{L}_1$ s počátečním bodem $A = [-1, 1\,]$ a s koncovým bodem $[\,3, 1\,]$ parametrizujeme:

$$r_1(t) = [\,t, 1\,]\,,\ t \in \langle -1, 3\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r_1}\,'(t) = (1, 0)\,,$$

a úsečku $\mathcal{L}_2$ s počátečním bodem $[\,3, 1\,]$ a s koncovým bodem $B = [\,3, -1\,]$ parametrizujeme:

$$r_2(t) = [\,3, -t\,]\,,\ t \in \langle -1, 1\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r_2}\,'(t) = (0, -1)\,.$$

Nyní vypočteme integrál (integrujeme diferenciální formu) z bodu A do bodu B

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (4x^2 - 2y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{1+y^2} - 2x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2} (4x^2 - 2y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{1+y^2} - 2x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{-1}^{3} \Big((4t^2 - 2\cdot 1)\cdot 1 + 0\Big)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{1} \left(0 + \left(\frac{1}{1+(-t)^2} - 2\cdot 3\right)\cdot(-1)\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{-1}^{3} \Big(4t^2 - 2\Big)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+t^2} - 6\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{4t^3}{3} - 2t\right]_{-1}^{3} - [\operatorname{arctg} t - 6t]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{124}{3} - \frac{\pi}{2}\,.$$

Poznamenejme, že daný integrál bychom mohli integrovat také např. po orientované úsečce $\overrightarrow{AB}$ se souhlasnou parametrizací

$$r_3(t) = [\,-1 + 4t, 1 - 2t\,]\,,\ t \in \langle 0, 1\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r_3}\,'(t) = (4, -2)\,.$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Obdrželi bychom sice pouze jeden integrál

$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}} (4x^2 - 2y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{1+y^2} - 2x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 \left((4(-1+4t)^2 - 2\cdot(1-2t))\cdot 4 + \left(\frac{1}{1+(1-2t)^2} - 2(-1+4t)\right)(-2)\right)\mathrm{d}t\,, =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(16(4t-1)^2 + 8\cdot(2t-1) - \frac{2}{1+(2t-1)^2} - 4(4t-1))\right)\mathrm{d}t\,,$$

ale jeho výpočet je komplikovanější. ♡

◇ Řešte následující příklady

12.12. Určete oblasti, v nichž je definováno vektorové pole

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}\,,\ \frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}\right)\,,$$

a ověřte, že funkce $U(x,y) = \dfrac{-2y^2}{(x+y)^2} + \log|x+y|$ je v těchto oblastech potenciálem vektorového pole $\vec{F}$.

12.13. Vypočtěte křivkový integrál $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\vec{F}(x,y) = (x^2, (1-y)^2)$ a křivka $\mathcal{C}$ je obecně zadaná elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,,\ a \neq 0,\ b \neq 0$, kladně orientovaná.

12.14. Je dáno vektorové pole $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ v oblasti $G = \mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$.

a) Ověřte, že v G platí $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$.

b) Výpočtem $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\mathcal{K}$ je kladně orientovaná kružnice se středem v $[0,0]$ a poloměrem $R = 2$, se přesvědčte, že $\vec{F}$ není potenciální v G.

c) Navrhněte některou oblast $\Omega \subset G$, v níž je pole $\vec{F}(x,y)$ potenciální.

◇ V následujících příkladech ověřte, že zadaný integrál nezávisí na integrační cestě. Vypočtěte jeho hodnotu (pokud to lze), je-li $\mathcal{K}$ křivka s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Zvolte vhodnou integrační cestu.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

12.15. a) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y\,,$ $\qquad A = [-2, 3\,],\ B = [\,3, 2\,]\,.$

b) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} (x + y^2)\,\mathrm{d}x - 2(y^3 - xy)\,\mathrm{d}y\,,$ $\qquad A = [\,1, 1\,],\ B = [\,1, -1\,]\,.$

c) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \left(\frac{y}{x} - 2\right)\mathrm{d}x + (\ln x + 1)\,\mathrm{d}y\,,$ $\qquad A = [\,2, 0\,],\ B = [\,1, 1\,]\,.$

d) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} 2x\,\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}y + \left(\frac{1}{z} - y\right)\mathrm{d}z\,,$ $\qquad A = [0, 0, -1\,],\ B = [\,0, 0, 2\,]\,.$

12.3 Výpočet potenciálu

12.16. Ověřme, že vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{3y}{x} - \frac{4x}{y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\ 3\ln x + \frac{4x^2 - y}{y^3}\right)$$

je potenciální. Určeme oblast Ω, na které je jeho potenciál U definován, a vypočtěme U tak, aby $U(1, -\frac{1}{2}) = -8$.

Řešení: Nejprve určíme definiční obor daného vektorové pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$. Funkce

$$F_1(x, y) = \frac{3y}{x} - \frac{4x}{y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{i} \quad F_2(x, y) = 3\ln x + \frac{4x^2 - y}{y^3}$$

jsou definovány na množině $M = \{\,[x, y] : x > 0,\ y \neq 0\}$. Vektorové pole $\vec{F}$ je spojitě diferencovatelné v $\mathcal{D}(\vec{F}) = M$.
Stanovíme jednoduše souvislou oblast $\Omega \subset \mathcal{D}(\vec{F})$ a ověříme, zda $\vec{F}$ splňuje v Ω nutnou a postačující podmínku pro to, aby bylo v Ω potenciální. Poznamenejme, že $\mathcal{D}(\vec{F})$ je sice otevřená, ale není souvislá, tedy ani jednoduše souvislá množina. Zvolíme jednu ze dvou oblastí

$$G_1 = \{\,[x, y] : x > 0,\ y > 0\} \quad \text{nebo} \quad G_2 = \{\,[x, y] : x > 0,\ y < 0\}\,,$$

které jsou podmnožinou $\mathcal{D}(\vec{F})$, neboť $\mathcal{D}(\vec{F}) = G_1 \bigcup G_2$. Pole $\vec{F}$ je definované a spojitě diferencovatelné v obou jednoduše souvislých oblastech G_1 a G_2.
Zohledníme zadanou podmínku pro hodnotu U v bodě $[\,1, -\frac{1}{2}\,]$, kterou musí hledaný potenciál splňovat. Jelikož $[\,1, -\frac{1}{2}\,] \in G_2$, zvolíme jednoduše souvislou oblast $\Omega = G_2$.
Nyní ověříme, zda jsou v oblasti Ω splněny podmínky pro existenci hledaného potenciálu. Protože platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{x} + \frac{8x}{y^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)\,,$$

je pole $\vec{F}$ v Ω potenciální a diferenciální forma $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem potenciálu U, tj. $F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y = \dfrac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$ Odtud

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=\frac{3y}{x}-\frac{4x}{y^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=3\ln x+\frac{4x^2-y}{y^3}\,.$$

Potenciál U je v oblasti Ω řešením této soustavy parciálních diferenciálních rovnic. Vypočteme ho 1. způsobem uvedeným v [MII], část 12.9.
Zintegrujeme levou i pravou stranu první rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=\frac{3y}{x}-\frac{4x}{y^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

podle proměnné x (proměnnou y považujeme v této chvíli za konstantu)

$$U(x,y)=\int\left(\frac{3y}{x}-\frac{4x}{y^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x=3y\ln x-\frac{2x^2}{y^2}+\sqrt{x}+\varphi(y)\,,$$

kde φ je libovolná funkce $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^-)$. Funkci φ určíme pomocí druhé parciální rovnice, tj. zderivujeme $U(x,y)$ podle y a výsledek porovnáme s druhou složkou vektorového pole $F_2(x,y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=3\ln x+\frac{4x^2}{y^3}+\varphi'(y)=3\ln x+\frac{4x^2-y}{y^3} \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y)=\frac{-1}{y^2} \quad\Rightarrow\quad \varphi(y)=\frac{1}{y}+K\,.$$

Dostaneme
$$U(x,y)=3y\ln x-\frac{2x^2}{y^2}+\sqrt{x}+\frac{1}{y}+K\,,$$

kde K je aditivní konstanta. Tuto konstantu určíme z podmínky $U(1,-\frac{1}{2})=-8$,

tj.
$$0-2\cdot 4+\sqrt{1}-2+K=-8 \quad\Rightarrow\quad K=1\,,$$

a tedy hledaný potenciál v $\Omega=\{\,[x,y]:x>0,\ y<0\}$ je

$$U(x,y)=3y\ln x-\frac{2x^2}{y^2}+\sqrt{x}+\frac{1}{y}+1\,.$$

♡

12.17. Ověřme, že je pole $\vec{F}(x,y,z)=(\,yz,\,xz,\,xy)$ potenciální, a určeme jeho potenciál.

Řešení: Vektorové pole $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ je definované a spojitě diferencovatelné na $\Omega=\mathbb{R}^3$, tj. na jednoduše souvislé množině. Nejprve zjistíme, zda potenciál existuje. Protože platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z)=z=\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z)\,,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)=y=\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z)$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z)=x=\frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z)\,,$$

je diferenciální forma $F_1\,\mathrm{d}x+F_2\,\mathrm{d}y+F_3\,\mathrm{d}z$ totálním diferenciálem potenciálu $U(x,y,z)$.

Potenciál U nyní vypočteme 2. způsobem uvedeným v [MII], část 12.9. (1. způsob je v $\mathbb{R}^3$ složitější). Příslušnou diferenciální formu integrujeme po cestě ze zvoleného bodu $A\in\Omega$ do libovolného bodu $X=[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}]\in\Omega$, přičemž integrační cestu $\mathcal{C}$ volíme (pokud to lze) tak, aby byla součtem orientovaných úseček rovnoběžných s osami souřadnic.

Určíme libovolný, ale pevný bod, např. $A = [0,0,0]$, $A \in \Omega$, a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \dot{+} \mathcal{C}_2 \dot{+} \mathcal{C}_3$, kde
$\mathcal{C}_1 = \overrightarrow{AB}$ je úsečka s počátečním bodem A a s koncovým bodem $B = [\widetilde{x},0,0]$,

$\mathcal{C}_2 = \overrightarrow{BC}$ je úsečka s počátečním bodem B a s koncovým bodem $C = [\widetilde{x},\widetilde{y},0]$,

$\mathcal{C}_3 = \overrightarrow{CX}$ je úsečka s počátečním bodem C a s koncovým bodem $X = [\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}]$.

Nyní tyto úsečky parametrizujeme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &: r(t) = [t,0,0],\ t \in \langle 0,\widetilde{x}\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = (1,0,0)\ ,\\
\mathcal{C}_2 &: r(t) = [\widetilde{x},t,0],\ t \in \langle 0,\widetilde{y}\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = (0,1,0)\ ,\\
\mathcal{C}_3 &: r(t) = [\widetilde{x},\widetilde{y},t],\ t \in \langle 0,\widetilde{z}\rangle \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = (0,0,1)\ .
\end{aligned}$$

Dále dostáváme: $U(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) - U(0,0,0) = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1 \dot{+} \mathcal{C}_2 \dot{+} \mathcal{C}_3} yz\ \mathrm{d}x + xz\ \mathrm{d}y + xy\ \mathrm{d}z =$

$$= \int_{\mathcal{C}_1} yz\ \mathrm{d}x + 0\ \mathrm{d}y + 0\ \mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_2} 0\ \mathrm{d}x + xz\ \mathrm{d}y + 0\ \mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_3} 0\ \mathrm{d}x + 0\ \mathrm{d}y + xy\ \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{\widetilde{x}} 0\ \mathrm{d}t + \int_0^{\widetilde{y}} 0\ \mathrm{d}t + \int_0^{\widetilde{z}} \widetilde{x}\,\widetilde{y}\,\mathrm{d}t \ = \ \widetilde{x}\,\widetilde{y}\,[\,t\,]_0^{\widetilde{z}} \ = \ \widetilde{x}\,\widetilde{y}\,\widetilde{z}\,.$$

Hledaný potenciál U daného pole $\vec{F}$ v jednoduše souvislé oblasti $\Omega = \mathbb{R}^3$ je tedy

$$U(x,y,z) = x\,y\,z\ + K\,, \quad \text{kde } K \in \mathbb{R}\,,$$

což snadno ověříme. Opravdu, $\vec{F} = \mathrm{grad}(U)$. ♡

12.18. Ověřte, že vektorové pole $\vec{F}(x,y) = \left(y^2, 2xy\right)$ je potenciální. Vypočtěte jeho potenciál U. Určete oblast Ω, na které je definován. Pomocí tohoto potenciálu vypočtěte

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\ ,$$

je-li $\mathcal{K}$ křivka s počátečním bodem $A = [-2,3]$ a koncovým bodem $B = [3,2]$. Výsledek porovnejte s příkladem 12.15. a.

12.19. Zjistěte, zda diferenciální forma $\quad \displaystyle\left(\frac{y}{x} - 2\right)\mathrm{d}x + (\ln x + 1)\,\mathrm{d}y$

je totálním diferenciálem nějaké funkce $f(x,y)$. Určete tuto funkci a oblast, na které je definována. Pomocí funkce f vypočtěte

$$\int_{\mathcal{K}} \left(\frac{y}{x} - 2\right)\,\mathrm{d}x + (\ln x + 1)\ \mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{K}$ je oblouk paraboly $y^2 = 2 - x$ s počátečním bodem $P = [1,1]$ a koncovým bodem $Q = [2,0]$. Výsledek porovnejte s příkladem 12.15. c.

$\diamondsuit$ V následujících příkladech zjistěte, zda jsou uvedená vektorová pole potenciální, a pokud ano, vypočtěte jejich potenciál. Stanovte jednoduše souvislé oblasti Ω, kde je potenciál definovaný.

12.20. a) $\vec{F}(x,y) = (x\,,\,y)\,.$

b) $\vec{F}(x,y) = (x^2 + 2xy - y^2\,,\,x^2 - 2xy - y^2)\,.$

c) $\vec{F}(x,y) = (y\,,\,x)\,.$

d) $\vec{F}(x,y) = (xy\,,\,yx)\,.$

e) $\vec{F}(x,y) = (x^2 - yx\,,\,y^2 - xy)\,.$

f) $\vec{F}(x,y) = (2x\,e^{xy} + x^2y\,e^{xy}\,,\,x^3e^{xy} + 2y)\,.$

g) $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x-2y}{(x-y)^2} + x\,,\,\dfrac{y}{(x-y)^2} - y^2\right)\,.$

12.21. a) $\vec{F}(x,y,z) = (z,y,x)\,.$ **b)** $\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)\,.$

c) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)\,.$ **d)** $\vec{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2\,,\,2yz\,,\,-x^2)\,.$

e) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)\,.$ **f)** konstantní: $\vec{F}(x,y,z) = (a,\,b,\,c)\,.$

$\diamondsuit$ V následujících příkladech ukažte, že daný výraz je totální diferenciál nějaké funkce U. Určete tuto funkci tak, aby platila zadaná podmínka.

12.22. a) $(3y^2 - x)\,\mathrm{d}x + (6xy - y^2)\,\mathrm{d}y\,,$ $\quad U(0,0) = 0\,.$

b) $y\cos x\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y\,,$ $\quad U\left(\dfrac{\pi}{2},1\right) = -2\,.$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{y}}{x^2} + 1\right)\mathrm{d}x - \left(\dfrac{1}{2x\sqrt{y}} - \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}\right)\mathrm{d}y\,,$ $\quad U(-1,1) = \dfrac{\pi}{6}\,.$

d) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{xy}} - \dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)\mathrm{d}x + \left(2 - \dfrac{\sqrt{x}}{y^2}\right)\mathrm{d}y\,,$ $\quad U(4,1) = 3\,.$

$\diamondsuit$ Vypočtěte křivkové integrály.

12.23. a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,,$ kde $\vec{F}(x,y) = \left(-y,\,\dfrac{1}{y} - x,\,2z\right)\,,$

křivka $\mathcal{C}$ je daná parametrickými rovnicemi $x = t^2 - 4,\ y = 5 - t,\ z = 4 - t^2,$ $t \in \langle -2, 2\rangle$, a probíhaná ve směru rostoucí souřadnice y .

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

b) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x$,

kde $\mathcal{K}$ je obvod obdelníka s vrcholy $A = [\,2, 2\,]$, $B = [\,4, 2\,]$, $C = [\,4, 5\,]$, $D = [\,2, 5\,]$, probíhaný v záporném smyslu.

c) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}y$,

kde $\mathcal{K}$ je hranice množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1,\, x^2 < y < 2\}$ probíhaná v kladném smyslu.

d) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} (xy^2 - \sin x \cos x)\, \mathrm{d}x + (x^2 y - \cos x \sin y)\, \mathrm{d}y$,

kde $\mathcal{C}$ je orientovaným součtem úseček $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CD}$, $A = [\,0, 0\,]$, $B = [\,\pi, 0\,]$, $C = [\,\pi, \frac{\pi}{2}\,]$, $D = [\,0, \frac{\pi}{2}\,]$.

e) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \quad$ kde $\displaystyle\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2} \right)$,

po nějaké křivce $\mathcal{C}$, vedoucí z bodu $A = [\,2, 1\,]$ do bodu $B = [\,4, 5\,]$.

f) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} (2x - y)\, \mathrm{d}x - x\, \mathrm{d}y + 3z^2\, \mathrm{d}z$,

kde $\mathcal{K}$ je průsečnice ploch daných rovnicemi $x^2 + y^2 = 9$ a $x + z = 0$. Křivku stručně popište.

VÝSLEDKY

1 Lineární prostor

1.2. **a)** Ano. **b)** Ano. **c)** Ne.
d) Ne. **e)** Ne.

1.4. **a)** Ano.
b) Ano.
c) Ne. Je-li f klesající, $-f$ není klesající
d) Ne. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -x$ jsou funkce monotónní. $f_1 + f_2$ není monotónní.

1.6. **a)** Ne. Limita součtu dvou posloupností s limitou 1 nemá limitu 1.
b) Ano.

1.8. **a)** Ne. **b)** Ano.

1.10. **a)** LN. **b)** LZ.

1.11. **a)** LN. **b)** LZ. **c)** LN. **d)** LZ.

1.13. **a)** $k = 12$. **b)** $k = -1$.
c) $k = 1$ nebo $k = 13$. **d)** $k = 0$ nebo $k = \frac{1}{3}$.

1.15. **a)** Např. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$; $\vec{a}_3 = 4\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. **b)** Např. $\{\vec{b}_1, \vec{b}_3\}$; $\vec{b}_2 = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_3$.
c) Např. $\{\vec{c}_1\}$; $\vec{c}_2 = -2\,\vec{c}_1$, $\vec{c}_3 = 3\,\vec{c}_1$. **d)** $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3\}$.

1.16. **a)** Např. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$; $\vec{a}_3 = -2\,\vec{a}_1 + 3\,\vec{a}_2$. **b)** Např. $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$; $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 + 2\,\vec{b}_2$.
c) Např. $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$; $\vec{c}_4 = -\vec{c}_1 - \vec{c}_2 + 2\,\vec{c}_3$.
d) Např. $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$; $\vec{d}_3 = 2\,\vec{d}_1 + \vec{d}_2$; $\vec{d}_4 = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$.

1.19. **a)** Lineárně nezávislé. **b)** Lineárně nezávislé.
c) Lineárně závislé. **d)** Lineárně závislé.

1.21. **a)** Např. $\{\vec{a}_1, (0,1)\}$. **b)** Např. $\{\vec{b}_1, (0,1,0), (0,0,1)\}$.
c) Např. $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, (0,0,1)\}$.

1.22. **a)** Např. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$.
b) Např. $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$.

1.24. **a)** Tvoří bázi $\mathbb{R}^3$; $\vec{x} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$. **b)** Tvoří bázi $\mathbb{R}^4$; $\vec{x} = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3 - 2\,\vec{b}_4$.
c) Netvoří bázi $\mathbb{R}^4$. **d)** Tvoří bázi $\mathbb{R}^4$; $\vec{x} = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3 + 2\,\vec{b}_4$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

1.26. **a)** LZ, báze $V=\{\vec{a}_1\}$, $\dim V=1$. **b)** LZ, báze $V=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2\}$, $\dim V=2$.
c) LZ, báze $V=\{\vec{c}_1\}$, $\dim V=1$.

1.27. **a)** LZ, báze $V=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$, $\dim V=3$. **b)** LZ, báze $V=\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3\}$, $\dim V=3$.
c) LZ, báze $V=\{\vec{c}_1,\ \vec{c}_2\}$, $\dim V=2$. **d)** LZ, báze $V=\{\vec{d}_1,\ \vec{d}_2\}$, $\dim V=2$.

1.29. **a)** Ano, $\dim M=1$. **b)** Ano, $\dim M=2$. **c)** Není.
d) Ano, $\dim M=2$. **e)** Není. **f)** Ano, $\dim M=3$.

2 Lineární zobrazení

2.3. **a)** Zobrazení L je lineární, není prosté, není to zobrazení na $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{N}(L)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2\,;\ \vec{x}=(-t,\,t),\,t\in\mathbb{R}\}$.
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

b) Zobrazení L není lineární.

c) Zobrazení L je lineární, je prosté, je to zobrazení na $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{N}(L)=\{\vec{o}\}$.
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

d) Zobrazení L je lineární, je prosté, není to zobrazení na $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{N}(L)=\{\vec{o}\}$.
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

e) Zobrazení L je lineární, není prosté, je to zobrazení na $\mathbb{R}$.
$\mathcal{N}(L)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2\,;\ \vec{x}=(-t,\,t),\,t\in\mathbb{R}\}$.
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$.

2.4. **a)** Zobrazení L je lineární, není prosté. $\mathcal{N}(L)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3\,;\ \vec{x}=(3\,t,\,-t,\,t),\,t\in\mathbb{R}\}$.
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$. Zobrazení není na $\mathbb{R}^4$.

b) Zobrazení L je lineární, je prosté. $\mathcal{N}(L) = \{\vec{0}\}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$ Zobrazení je na $\mathbb{R}^3$.

c) Zobrazení L není lineární.

d) Zobrazení L je lineární, není prosté.
$\mathcal{N}(L) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,;\; \vec{x} = (-s,\, -s,\, t,\, s),\, t, s \in \mathbb{R}\}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ Zobrazení není na $\mathbb{R}^3$.

e) Zobrazení L není lineární.

2.6. **a)** Zobrazení L není lineární.

b) Zobrazení L je lineární, není prosté.

c) Zobrazení L je lineární, je prosté. Matice reprezentující inverzní zobrazení:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

d) Zobrazení L je lineární, je prosté. Matice reprezentující inverzní zobrazení:

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ -6 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

e) Zobrazení L je lineární, je prosté. Matice reprezentující inverzní zobrazení:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.8. **a)** $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. **b)** $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$.

c) A^{-1} existuje pro $a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0 \ \wedge \ c \neq 0$. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{ab} & \frac{1-b}{abc} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{bc} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$.

d) A^{-1} existuje pro $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -\frac{1}{3}$. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x}{x+3x^2} & -\frac{1}{x+3x^2} \\ 0 & \frac{x}{x+3x^2} & \frac{3x}{x+3x^2} \\ 1 & -\frac{3x^2}{x+3x^2} & \frac{x-6x^2}{x+3x^2} \end{bmatrix}$.

2.9. **a)** $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = (1, 0)$.

c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = (-2, 3, -3)$.

d) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = (0, -1, 2)$.

e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -31 & 11 & 6 \\ 6 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = (0, -3, 1)$.

2.11. **a)** Zobrazení je lineární.

b) Zobrazení není lineární.

c) Zobrazení není lineární.

d) Zobrazení je lineární.

2.12. **a)** Zobrazení není lineární.

b) Zobrazení je lineární, $U = \mathbb{R}$; $\mathcal{N}(f) = \{f \in C^1(\langle a, b\rangle,\ f(a) + f(b) = 0\}$; není prosté.

c) Zobrazení je lineární, $U = \mathbb{R}$; $\mathcal{N}(f) = \{f \in C^1(\langle a, b\rangle, f'(\frac{a+b}{2}) = 0\}$; není prosté.

d) Zobrazení není lineární.

2.14. **a)** $\lambda_1 = 3: \vec{h}_1 = k\,(1,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ \lambda_2 = -1: \vec{h}_2 = k\,(-1,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

b) $\lambda_1 = -1: \vec{h}_1 = k\,(0,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ \lambda_2 = 1: \vec{h}_2 = k\,(1,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

c) $\lambda_1 = 1 + 2\,\mathrm{i}: \vec{h}_1 = k\,(\frac{\mathrm{i}}{2},1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ \lambda_2 = 1 - 2\,\mathrm{i}: \vec{h}_2 = k\,(-\frac{\mathrm{i}}{2},1),$ $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

d) $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobné) $: \vec{h}_1 = k\,(0,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

e) $\lambda_1 = 3: \vec{h}_1 = k\,(1,1,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$
$\lambda_2 = -2$ (dvojnásobné) $: \vec{h}_2 = k\,(-2,3,3),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

f) $\lambda_1 = 2: \vec{h}_1 = k\,(3,-2,4),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ \lambda_2 = -1: \vec{h}_2 = k\,(0,-1,2),$ $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$
$\lambda_3 = 1: \vec{h}_3 = k\,(6,-7,12),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

g) $\lambda_1 = -2: \vec{h}_1 = k\,(0,1,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$
$\lambda_2 = \sqrt{5}: \vec{h}_2 = k\,(-2-\sqrt{5}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$
$\lambda_3 = -\sqrt{5}: \vec{h}_3 = k\,(-2+\sqrt{5}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

h) $\lambda_1 = \mathrm{i}: \vec{h}_1 = k\,(1+\mathrm{i},1,1),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ \lambda_2 = -\mathrm{i}: \vec{h}_2 = k\,(1-\mathrm{i},1,1),$ $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$
$\lambda_3 = 1: \vec{h}_3 = k\,(2,1,3),\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

2.16. **a)** $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$ **b)** $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$

c) $\mathbf{X} = 6(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$

d) $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{E})\mathbf{B}^{-1},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}.$

e) $\mathbf{X} = \mathbf{E} + 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 9 & -26 & -16 \\ 8 & -13 & -10 \\ 10 & -30 & -21 \end{bmatrix}.$

f) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B} + 2\mathbf{A})\mathbf{B}^{-1},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

g) $\mathbf{X} = 4(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -16 & 28 & -20 \\ -8 & 24 & -16 \\ -4 & 12 & -12 \end{bmatrix}.$

3 Lineární diferenciální rovnice

3.3. **a**) Ano. **b**) Ano. **c**) Ne. **d**) Ne. **e**) Ano. **f**) Ano. **g**) Ano. **h**) Ne.

3.5. **a)** HLDR 2. řádu s konstantními koeficienty $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = 3$, $a_2(x) = -1$.

b) HLDR 2. řádu s koeficienty $a_0(x) = x$, $a_1(x) = -1$, $a_2(x) = 4x^3$.

c) NLDR 3. řádu s konstantními koeficienty $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = a_2(x) = 0$,

$a_3(x) = -1$ a pravou stranou $b(x) = 2x\cos x$.

d) NLDR 1. řádu s konstantními koeficienty $a_0(x) = 7$, $a_1(x) = 0$

a pravou stranou $b(x) = x\mathrm{e}^x$.

e) HLDR 4. řádu s koeficienty $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = a_3(x) = 0$, $a_2(x) = 2$, $a_4(x) = -x$.

f) Není lineární.

g) NLDR 1. řádu s konstantními koeficienty $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = 2$

a pravou stranou $b(x) = x^3$.

h) NLDR 2. řádu s koeficienty $a_0(x) = 1 - x$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = -1$

a pravou stranou $b(x) = 2(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}$.

i) Není lineární.

j) HLDR 4. řádu s konstantními koeficienty $a_0(x) = 4$, $a_1(x) = -3$,

$a_2(x) = a_3(x) = a_4(x) = 0$.

k) NLDR 1. řádu s koeficienty $a_0(x) = 1 - x$, $a_1(x) = -1$

a pravou stranou $b(x) = 1$.

l) NLDR 2. řádu s konstantními koeficienty $a_0(x) = 2$, $a_1(x) = 3$, $a_2(x) = 1$

a pravou stranou $b(x) = x + 10\sin x$.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

3.7. **a)** Funkce jsou LN, tedy ano.
b) Funkce jsou LN, tedy ano.
c) Funkce jsou LZ, tedy ne.
d) Funkce jsou LN, tedy ano.
e) Funkce jsou LN, tedy ano.
f) Funkce jsou LZ, tedy ne.
g) Funkce jsou LN, tedy ano.
h) Funkce jsou LN, tedy ano.

3.10. **a)** $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{7x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

b) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} \cos x + C_2 \mathrm{e}^{3x} \sin x,\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = C_1,\ C_1,\, x \in \mathbb{R}.$

d) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2 \mathrm{e}^{\frac{x}{3}},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

f) $y(x) = C_1 + C_2\, x,\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-3x},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

h) $y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{\frac{3}{4}x},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

i) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{4x},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

j) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-4x} \cos 3x + C_2 \mathrm{e}^{-4x} \sin 3x,\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

k) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

l) $b = 0 \implies y(x) = C_1 \mathrm{e}^{ax} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{ax},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

$b \neq 0 \implies y(x) = C_1 \mathrm{e}^{(a+b)x} + C_2 \mathrm{e}^{(a-b)x},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

m) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x},\ C_1,\, x \in \mathbb{R}.$

n) $b = 0 \implies y(x) = C_1 \mathrm{e}^{ax} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{ax},\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

$b \neq 0 \implies y(x) = C_1 \mathrm{e}^{ax} \cos bx + C_2 \mathrm{e}^{ax} \sin bx,\ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

3.12. **a)** $y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{x} + C_3 \mathrm{e}^{-2x},\ C_1,\, C_2,\, C_3,\, x \in \mathbb{R}.$

b) $y(x) = C_1 + C_2\, x + C_3 \mathrm{e}^{3x} + C_4 \mathrm{e}^{-4x},\ C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{2x} \cos x + C_3 \mathrm{e}^{2x} \sin x,\ C_1,\, C_2,\, C_3,\, x \in \mathbb{R}.$

d) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} + C_3\, x\, \mathrm{e}^{2x},\ C_1,\, C_2,\, C_3,\, x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x,\ C_1, C_2, C_3, C_4,\ x \in \mathbb{R}.$

f) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3\, x\, e^x + C_4\, x^2\, e^x,\ C_1, C_2, C_3, C_4,\ x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,\ C_1, C_2, C_3, C_4,\ x \in \mathbb{R}.$

h) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x,\ C_1, C_2, C_3, C_4,\ x \in \mathbb{R}.$

i) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-4x},\ C_1, C_2, C_3,\ x \in \mathbb{R}.$

j) $y(x) = C_1 + C_2\, x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + C_5\, x\, \cos x + C_6\, x\, \sin x,$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6,\ x \in \mathbb{R}.$

3.15. **a)** $y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \in \mathbb{R}.$ **b)** $y(x) = 2\cos 2x + 4 \sin 2x,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}.$ **d)** $y(x) = e^{-x}(2\cos x + 5 \sin x),\ x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = e^{5x}(2 - x),\ x \in \mathbb{R}.$ **f)** $y(x) = 3e^{3x} - 2e^{-x},\ x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = 4e^{-3x} - 3e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}.$ **h)** $y(x) = 3e^{-2x} \sin 5x,\ x \in \mathbb{R}.$

i) $y(x) = e^{3x} - 2e^x,\ x \in \mathbb{R}.$ **j)** $y(x) = 9,\ x \in \mathbb{R}.$

3.16. **a)** Neexistuje. **b)** $y(x) = e^{4\pi - 2x} \cos x + C_2\, e^{-2x} \sin x,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = 9e^{2x} - 9e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}.$ **d)** $y(x) = C_1\, \cos \frac{3}{2}x + 2\, \sin \frac{3}{2}x,\ C_1,\ x \in \mathbb{R}.$

e) Neexistuje. **f)** $y(x) = 27e^{-3x} - 41x\, e^{-3x},\ x \in \mathbb{R}.$

3.17. **a)** $y(x) = 7,\ x \in \mathbb{R}.$ **b)** $y(x) = 6e^x - 2e^{3x} + e^{-4x},\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$ **d)** $y(x) = -e^{2x} + 2xe^{2x} + e^{-2x} + 2xe^{-2x},\ x \in \mathbb{R}.$

3.21. **a)** $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2\, x\, e^{2x} + \dfrac{1}{9}\, e^{-x},\ C_1, C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

b) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2\, x\, e^{2x} + \dfrac{3}{2}\, x^2\, e^{2x},\ C_1, C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2\, e^{-2x} - 2x^3 - 3x,\ C_1, C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

d) $y(x) = C_1 + C_2\, e^{-3x} + \dfrac{3}{2}x^2 - x,\ C_1, C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2\, e^{-x} + \dfrac{1}{4}\, \cos 2x - \dfrac{3}{4}\, x\, \sin 2x,\ C_1, C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

f) $y(x) = C_1 \cos 2x + \left(C_2 + \frac{1}{4}\,x\right) \sin 2x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = \mathrm{e}^{4x}(C_1 + C_2\, x + 4x^2),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

h) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{5},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

i) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{2x}(C_2 - x^2 - 3x),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

j) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} - x^2 + x - 3,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

k) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x - \sin x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

l) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{x}\left(C_2 + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32}\right),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

m) $y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5x} + 2x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

n) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2\mathrm{e}^{x},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

o) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 \sin x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

p) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

q) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-x} - 1 + x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

r) $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 + C_2\,x + 3x^2),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

s) $y(x) = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{x} \cos x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

t) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{x} - x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

3.22. a) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{x}(4x + 3),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

b) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{x}{2}\,(x + 1),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + \sin x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

d) $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{5}x}\left(C_1 \cos \frac{4}{5}x + C_2 \sin \frac{4}{5}x\right) + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{13},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-5x} - \mathrm{e}^{x} \cos x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

f) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{6}\,x^3\,\mathrm{e}^{x},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{2}\,x^2 - x\right),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

h) $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}}(C_1 + C_2\,x) + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

i) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{2x}(2x+1),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

j) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\,x} - \dfrac{5}{2}\cos x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

k) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x + 3,\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

l) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{x} - x^2 - 2x - 2,\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

m) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-3x},\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

n) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}\,(\cos x + \sin x),\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

o) $y(x) = \mathrm{e}^{2x}(C - \cos x),\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

p) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{4x}(2x^3 + 7x),\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

3.23. **a)** $y(x) = C_1 + C_2\,x + C_3\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{2}\,x^3 + x^2,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ x \in \mathbb{R}.$

b) $y(x) = C_1 + C_2\,x + C_3\,\mathrm{e}^{-x} + 7x\,\mathrm{e}^{-x},\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = (C_1 + C_2\,x)\cos 2x + (C_3 + C_4\,x)\sin 2x + \dfrac{1}{9}\cos x,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ x \in \mathbb{R}.$

d) $y(x) = C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2 + C_4\cos x + C_5\sin x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{60},$
$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{2x} - x - 4,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ x \in \mathbb{R}.$

f) $y(x) = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^{2x} + (C_3 + C_4\,x)\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{8}\,x^2\,\mathrm{e}^{-2x},\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^{x} + C_3\,\mathrm{e}^{-2x} + (x^2 + x - 1)\,\mathrm{e}^{-x},\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ x \in \mathbb{R}.$

h) $y(x) = (C_1 + C_2\,x - \dfrac{1}{8}\,x^2)\cos x + (C_3 + C_4\,x)\sin x,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ x \in \mathbb{R}.$

3.24. **a)** $y(x) = (x - \pi)\sin\frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}.$ **b)** $y(x) = \sqrt{3}\,\sin 3x - \cos 3x - \sin 2x,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = 1 + x^2,\ x \in \mathbb{R}.$ **d)** $y(x) = \mathrm{e}^{2x} + (1 - x - x^2)\,\mathrm{e}^{x},\ x \in \mathbb{R}.$

e) Neexistuje. **f)** $y(x) = 2x - \pi + \pi\cos x + C_2\sin x,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = x^6 + x + 2,\ x \in \mathbb{R}.$ **h)** $y(x) = 5\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4,\ x \in \mathbb{R}.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

3.26. **a)** $y(x) = C_1 \cos \dfrac{x}{2} + C_2 \sin \dfrac{x}{2} + x + \mathrm{e}^x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

b) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

c) $y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + 3x + \mathrm{e}^x\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}\right),\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

d) $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1 + \dfrac{1}{6}\,x\,\sin 3x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{9}{5}\,x\,\cos \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

f) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{2}\,x\,\cos x - \dfrac{1}{3}\,\cos 2x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

g) $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-4x} - \dfrac{1}{5}\,x\,\mathrm{e}^{-4x} - \dfrac{1}{36}\,(6x+1)\,\mathrm{e}^{-x},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

h) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + 2x - 3 + 3\cos x,\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

i) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + x\ \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - x - \dfrac{x^2}{2},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

j) $y(x) = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}\,\cos x + \dfrac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x},\ C_1,\ C_2,\ x \in \mathbb{R}.$

k) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 2x - 4 - 2\cos x + \sin x,\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

l) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x + 2 + 7x\,\mathrm{e}^{-x},\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

m) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} - 2\cos 3x + 3\sin 3x,\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

n) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - 3 + \mathrm{e}^{2x},\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

o) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} - \cos 2x + \sin 2x + 4\cos x + 2\sin x,\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

p) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{3x} - (5x+3)\cos x - (15x+4)\sin x - 2,\ C,\ x \in \mathbb{R}.$

3.29. **a)** $y(x) = \mathrm{e}^{3x}\left(C_1 + C_2\,x + \dfrac{1}{x}\right),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+(\text{resp. } \mathbb{R}^-).$

b) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x} + x^2\mathrm{e}^{-2x}(2\ln x - 3),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+.$

c) $y(x) = \mathrm{e}^{2x}((C_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (C_2 + x)\sin x),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R},\ x \in I_k,$

$I_k = ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.$

d) $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \dfrac{6\sin^2 3x - 3}{\cos 3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in I_k$,

$I_k = ((2k-1)\frac{\pi}{6}, (2k+1)\frac{\pi}{6}), k \in \mathbb{Z}$.

e) $y(x) = \mathrm{e}^{-3x}(C_1 + C_2\, x - \ln\sqrt{1+x^2} + 2x \operatorname{arctg} x)$, $C_1, C_2, x \in \mathbb{R}$.

f) $y(x) = \cos 2x\,(C_1 - 2\ln|\sin x|) + \sin 2x\,(C_2 - \operatorname{cotg} x - 2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in I_k$,

$I_k = (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$.

g) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^x - \cos \mathrm{e}^x$, $C_1, C_2, x \in \mathbb{R}$.

h) $y(x) = \cos\dfrac{x}{2}\left(C_1 + \ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|\right) + \sin\dfrac{x}{2}\left(C_2 + \dfrac{x}{2}\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in I_k$,

$I_k = ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$.

i) $y(x) = \mathrm{e}^{2x}\,(C_1 + C_2\, x - \ln|x|)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$(resp. $\mathbb{R}^-$).

j) $y(x) = \mathrm{e}^x\,(C_1 - \ln(1+\mathrm{e}^{2x})) + \mathrm{e}^{2x}(C_2 + 2\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x)$, $C_1, C_2, x \in \mathbb{R}$.

k) $y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1 + C_2\, x + \dfrac{1}{2}\,(x+1)^2\left(\ln(x+1) - \dfrac{3}{2}\right)\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, \infty)$.

l) $y(x) = \mathrm{e}^{-5x}\left(C_1 + C_2\, x + \dfrac{1}{2}\,(x\,\ln|x| - (2+x)\ln|x+2|)\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$x \in (-\infty, -2)$ nebo $x \in (-2, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$.

m) $y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1 + C_2\, x + \sqrt{(x+1)^5}\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, \infty)$.

n) $y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1 + C_2\, x - \operatorname{arctg} x + x\,\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$(resp. $\mathbb{R}^-$).

3.30. **a)** $y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} - \ln x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$(resp. $\mathbb{R}^-$).

b) $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\left(C_1 - \dfrac{x}{3}\right) + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}\right)\,\ln\left|\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - 1\right| - 1$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,
$x \in \mathbb{R}^+$(resp. $\mathbb{R}^-$).

c) $y(x) = C_1\,\cos x + C_2\,\sin x + 2 + \cos x\,\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in I_k$,

$I_k = (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$.

d) $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x$, $C_1, C_2, x \in \mathbb{R}$.

e) $y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$(resp. $\mathbb{R}^-$).

3.31. **a)** $y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\ \ln\dfrac{2}{1+x^2} + x\,\mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

b) $y(x) = \mathrm{e}^{6x}(8 - 7x + x\ \ln x),\ \ x \in \mathbb{R}^+.$

c) $y(x) = 2(1-x)\cos 2x + (\ln|\sin 2x| - 2)\sin 2x,\ \ x \in (-\frac{\pi}{2}, 0).$

d) $y(x) = -2\,\mathrm{e}^{5x} + x\,\mathrm{e}^{5x} + 2x\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{5x},\ \ x \in \mathbb{R}^+.$

e) $y(x) = 2\sin x - \cos x + \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sin x},\ \ x \in (0, \pi).$

f) $y(x) = x - (1 + \mathrm{e}^{-x})\ \ln\dfrac{1+x^2}{2},\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.33. **a)** $y(x) = C_1 + C_2\,x\,(\ln x - 1),\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in (1, \infty).$

b) $y(x) = C_1 + C_2\,x^2 + \mathrm{e}^x\,(x-1),\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$).

c) $y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\,(x+1),\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+.$

d) $y(x) = C_1 + C_2\,(x-1)^3,\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x > 1$ (resp. $x < 1$).

e) $y(x) = C_1 + C_2\ \ln|x| + x^2,\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$).

f) $y(x) = C_1 + C_2\,x^4 - \dfrac{x^3}{6},\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$).

g) $y(x) = C_1 + C_2\left(x + \dfrac{x^3}{3}\right) + 2x^2 + x^4,\ \ C_1,\, C_2,\, x \in \mathbb{R}.$

h) $y(x) = C_1 + C_2\,x^3 + x^5,\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$).

i) $y(x) = C_1 + \ln x\,(C_2 + x) - x,\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+.$

j) $y(x) = C_1 + C_2\,(2+x)\mathrm{e}^{-x},\ \ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x > -1$ (resp. $x < -1$).

3.35. **a)** $y(x) = 4 + 2x + 4\ln|x-2|,\ \ x \in (-\infty, 0).$

b) $y(x) = 1 + 2x + \sin 2x - \cos 2x,\ \ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$

c) $y(x) = 1 - 2x - \ln(1-x),\ \ x \in (-\infty, 1).$ **d)** $y(x) = x + 3 - \pi,\ \ x \in \mathbb{R}.$

e) $y(x) = 3 - x^2 + x^4,\ \ x \in (0, \infty).$ **f)** $y(x) = \pi - \sin x,\ \ x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi).$

g) $y(x) = 2x + 2\operatorname{cotg} x,\ \ x \in (0, \pi).$ **h)** $y(x) = \dfrac{3}{2}\,\pi x + 7,\ \ x \in \mathbb{R}.$

i) $y(x) = 1 - x - \cos x\ \sin x,\ \ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$ **j)** $y(x) = 5 + x - x^2,\ \ x \in \mathbb{R}^+.$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

3.36. **a)** $y(x) = C_1 + C_2\,x + C_3\,\mathrm{e}^x + \ln|x|,\ C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$).

b) $y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{-x} + x^3,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ x \in \mathbb{R}$.

c) $y(x) = 4 - 3\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$.

4 Soustavy diferenciálních rovnic

4.2. Neautonomní. Dosazením funkcí $x\,,y$ do rovnic.

4.3. Autonomní. Dosazením funkcí $x\,,y$ do rovnic.
Řešení: $x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,t\,\mathrm{e}^{2t},\ y(t) = C_2\,\mathrm{e}^t\,,\quad t \in \mathbb{R}\,,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

4.4. Neautonomní. Dosazením $x\,,y$ do rovnic v $(-\infty, 1)$:
$L = x'(t) = (2(t + \mathrm{e}^t))' = 2(1 + \mathrm{e}^t) = y(t) = P\,,$
$L = y'(t) = (2(1 + \mathrm{e}^t))' = 2\mathrm{e}^t,\ P = \dfrac{t \cdot 2(1 + \mathrm{e}^t)}{t - 1} - \dfrac{2(t + \mathrm{e}^t)}{t - 1} = 2\mathrm{e}^t$
a do PP v bodě 0.

4.5. Autonomní. Rovnovážné stavy: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

4.6. Autonomní. Dosazením $x\,,y$ do rovnic v $I = (-\infty, \infty)$. Rovnovážný stav: $[0, 0]$.

4.7. **a)** $[0, 0]$, **b)** $[\cos t, \sin t]$, **c)** $[\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2})]$.

4.10. **a)** $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\quad t \in \mathbb{R}\,,\ C_1\,,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} \cos 8t - 8\sin 8t \\ 5\cos 8t \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 8\cos 8t + \sin 8t \\ 5\sin 8t \end{bmatrix},\quad t \in \mathbb{R}\,,$$

$C_1\,,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$

c) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R},\; C_1,\; C_2 \in \mathbb{R}.$

d) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R},\; C_1,\; C_2 \in \mathbb{R}.$

e) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R},\; C_1,\; C_2 \in \mathbb{R}.$

f) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R},\; C_1,\; C_2 \in \mathbb{R}.$

g) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R},\; C_1,\; C_2 \in \mathbb{R}.$

h) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R},\; C_1,\; C_2 \in \mathbb{R}.$

4.11. a) $x(t) = \mathrm{e}^t, \quad y(t) = -2\,\mathrm{e}^t, \quad t \in \mathbb{R}.$

b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\,\mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-6t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R}.$

d) $x(t) = \cos t + \sin t, \quad y(t) = 2\cos t + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$

4.12. a) $x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$

b) $x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t \quad t \in \mathbb{R}$

c) $x(t) = -\sin t, \quad y(t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$

4.14. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\mathrm{e}^{10t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R},$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

4.15. tečna : $\begin{array}{rcl} x & = & -2+10s \\ y & = & 5-25s \end{array}$, $s \in \mathbb{R}$,

řešení : $x(t) = -2\,\mathrm{e}^{-5t}$, $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{-5t}$, $t \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow$

trajektorie řešení: polopřímka PA, kde $P = [0,0]$, $A = [-2,5]$.

4.18. $[x_1, y_1] = [20,20\,;50,75]$.

4.19. $[x_2, y_2] = [1,32365\,;0,48608]$.

4.20. $x(0,4) \doteq 0,4$, $x'(0,4) \doteq 0,960266$.

4.21.

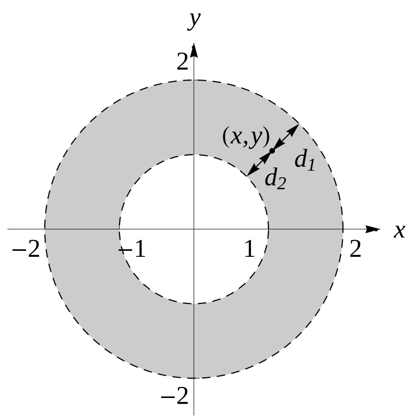
i	t_i	$x_i \doteq x(t_i)$	$y_i \doteq x'(t_i)$	$h\,f(t_i, x_i, y_i)$	$h\ g(t_i, x_i, y_i)$
0	0	1	0	0,00	-0,25
1	0,25	1,00	-0,25	-0,0625	-0,234375
2	0,5	0,93750	-0,484375	-0,121094	-0,173828
3	0,75	0,816406	-0,658203	-0,164551	-0,080688
4	1	0,651855	-0,738892		

5 Funkce více proměnných, jejich spojitost a limita

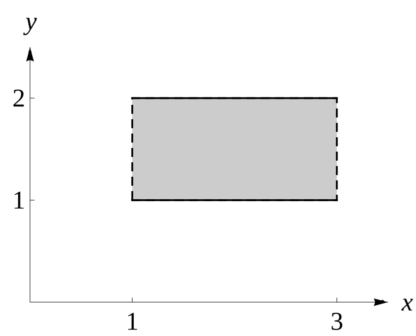
5.3. **a)** Množina je otevřená, každý její bod je vnitřním bodem, $\varepsilon = \min\{d_1, d_2\}$.

b) Množina není ani otevřená ani uzavřená, obsahuje pouze část hranice.

a)



b)

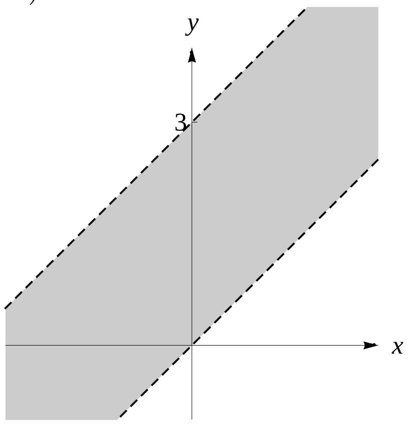


Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

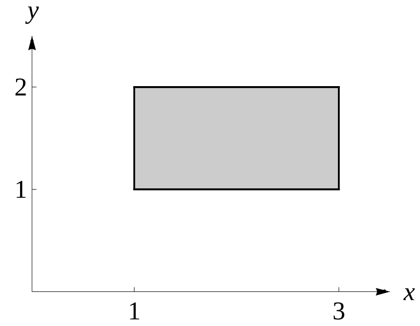
c) Množina je otevřená, každý její bod je vnitřním bodem.

d) Množina je uzavřená, hranice množiny je její podmnožinou.

c)



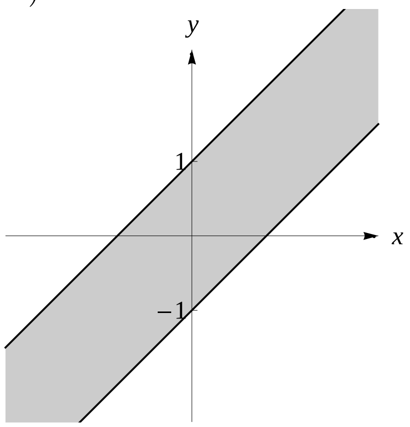
d)



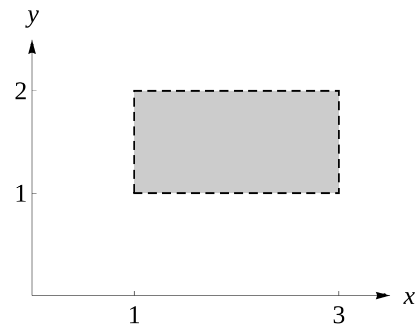
e) Množina je uzavřená, hranice množiny je její podmnožinou.

f) Množina je otevřená, každý její bod je vnitřním bodem.

e)



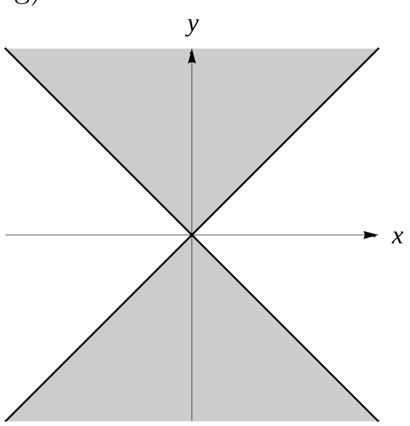
f)



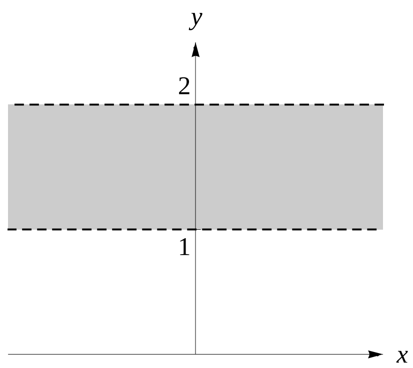
g) Množina je uzavřená, hranice množiny je její podmnožinou.

h) Množina je otevřená, každý její bod je vnitřním bodem.

g)



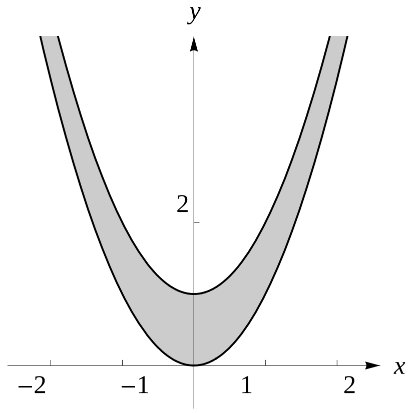
h)



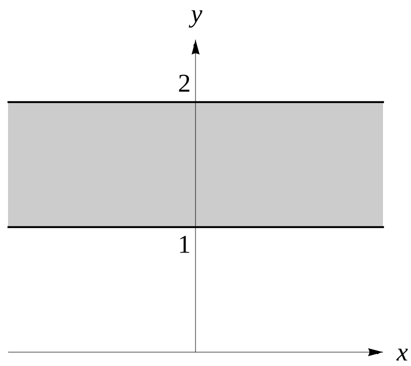
i) Množina je uzavřená, hranice množiny je její podmnožinou.

j) Množina je uzavřená, hranice množiny je její podmnožinou.

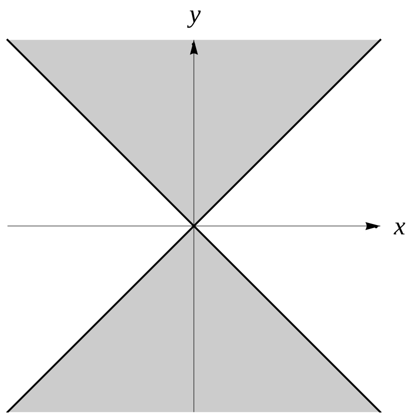
i)



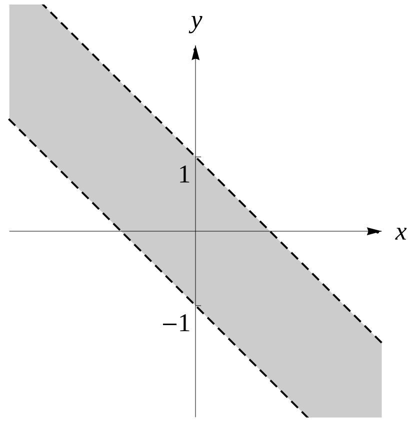
j)



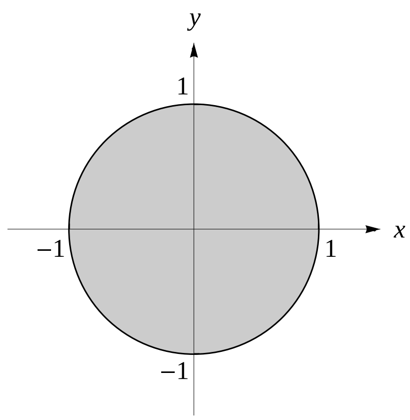
5.4. **a)** Není konvexní.



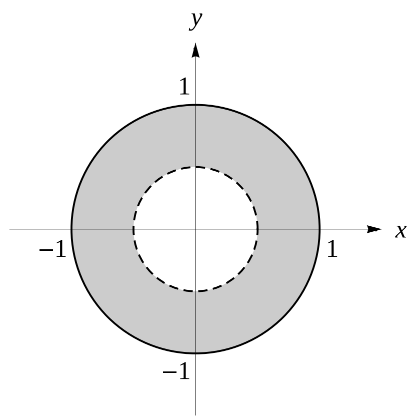
b) Je konvexní.



c) Je konvexní.

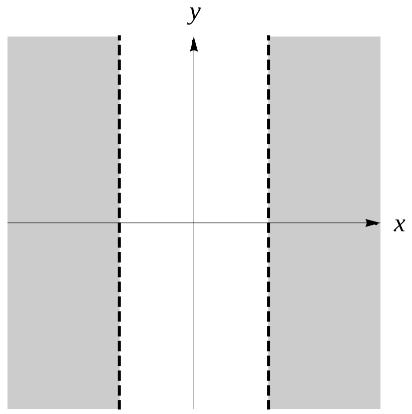


d) Není konvexní.

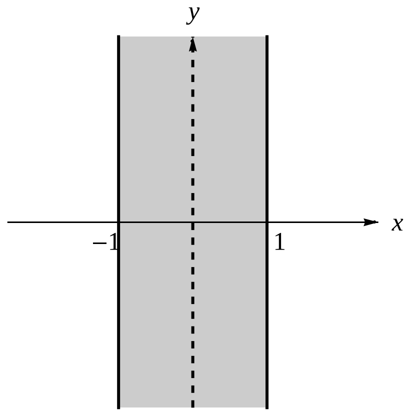


Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

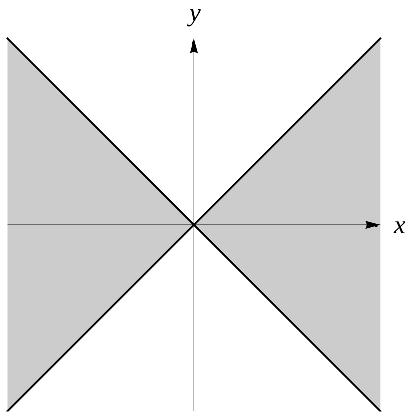
e) Není konvexní.



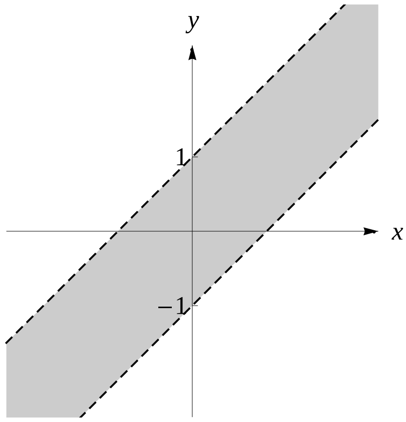
f) Není konvexní.



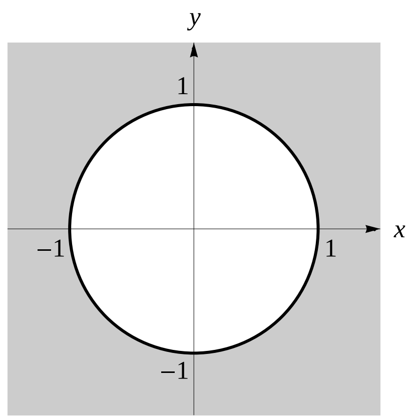
5.6. **a)** Uzavřená oblast.



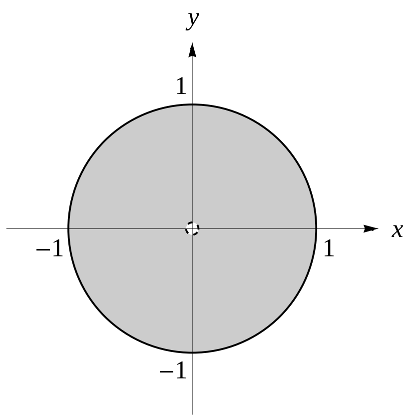
b) Není uzavřená oblast (není uzavřená).



c) Uzavřená oblast.

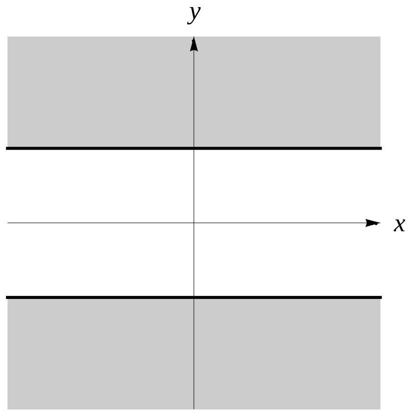


d) Není uzavřená oblast (není uzavřená).

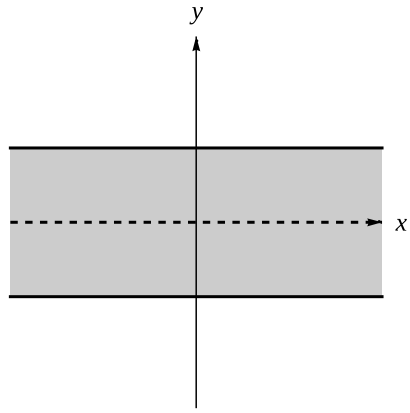


Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

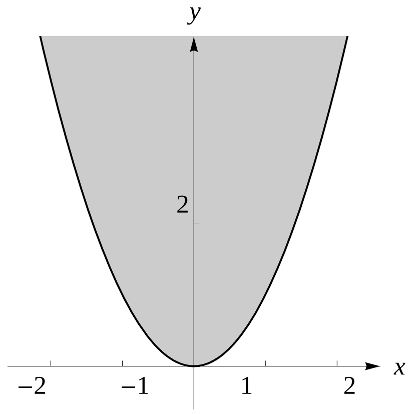
e) Není uzavřená oblast
(není souvislá).



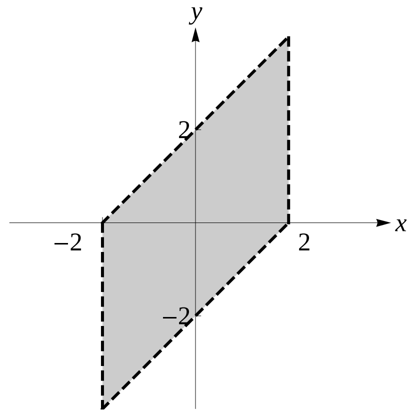
f) Není uzavřená oblast
(není uzavřená ani souvislá).



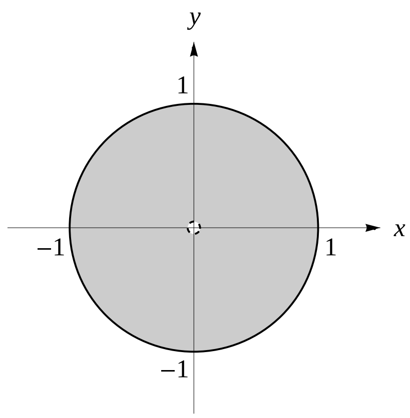
5.8. **a)** Není omezená.



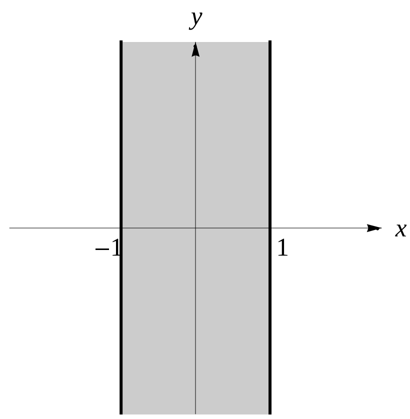
b) Je omezená, $\forall X \in M_2;\ \rho(X,0) \le 2\sqrt{5}$.



c) Je omezená, $\forall X \in M_3;\ \rho(X,0) \le 1$.

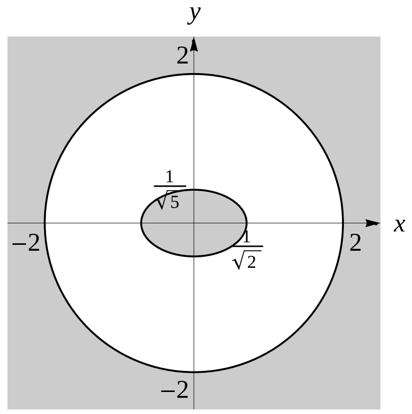


d) Není omezená.

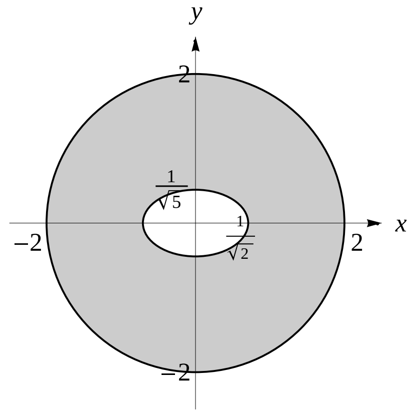


Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

e) Není omezená.



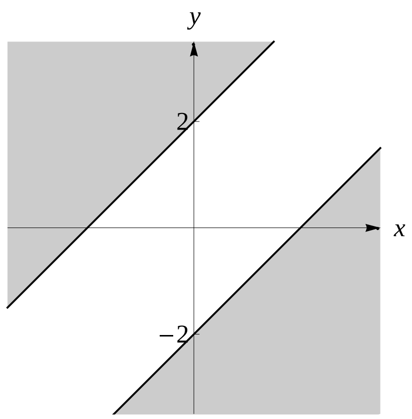
f) Je omezená, $\forall X \in M_6;\ \rho(X, 0) \leq 2$.



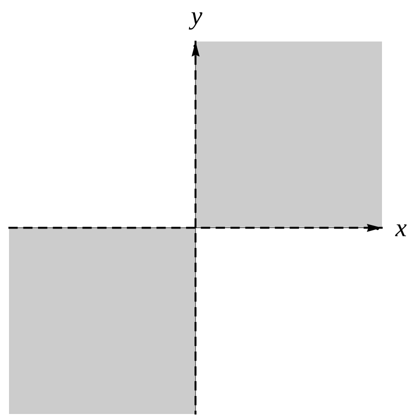
5.10. a) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y - x| \geq 2\}$ je množina uzavřená, neomezená, není konvexní a není souvislá. $\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x \pm 2\}$.

b) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$ je množina otevřená, neomezená, není konvexní a není souvislá.
$\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \vee y = 0\}$.

a)



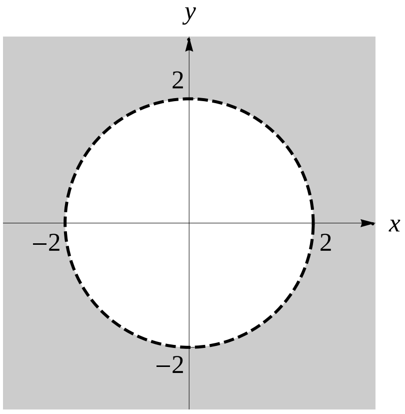
b)



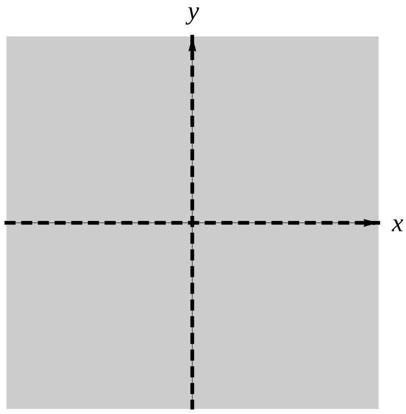
c) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 4\}$ je množina otevřená, souvislá, neomezená a není konvexní. $\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4\}$.

d) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ je množina otevřená, neomezená, není konvexní a není souvislá. $\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \vee y = 0\}$.

c)



d)



e) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 2 \wedge |y| \geq 2\}$ je množina uzavřená, neomezená, není konvexní a není souvislá.

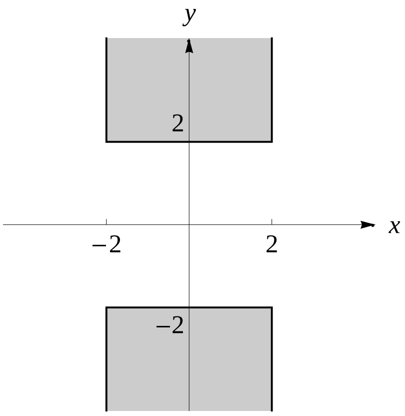
$\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (y = \pm 2 \wedge |x| \leq 2) \vee (x = \pm 2 \wedge |y| \geq 2)\}$.

f) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2 < 1) \wedge ((x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0))\}$ je množina otevřená, omezená, není konvexní a není souvislá.

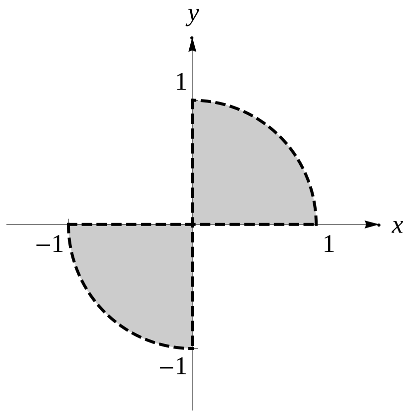
$\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (y = 0 \wedge |x| \leq 1) \vee (x = 0 \wedge |y| \leq 1)\} \cup$

$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (\sqrt{1 - x^2} \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (-\sqrt{1 - x^2} \wedge -1 \leq x \leq 0)\}$

e)



f)

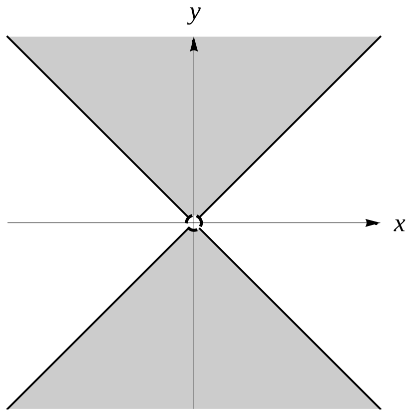


g) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (|x| \leq |y|) \wedge (y \neq 0)\}$ není množina otevřená ani uzavřená, není konvexní a není souvislá. $\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = \pm x\}$.

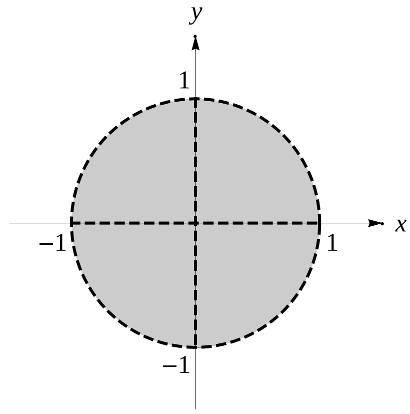
h) $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2 < 1) \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ je množina otevřená, omezená, není konvexní a není souvislá.

$\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1 \vee (x = 0 \wedge |y| \leq 1) \vee (y = 0 \wedge |x| \leq 1)\}$.

g)



h)



i) $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x^2+y^2>4) \wedge (|y-x|>2)\}$ je množina otevřená, neomezená, není konvexní a není souvislá

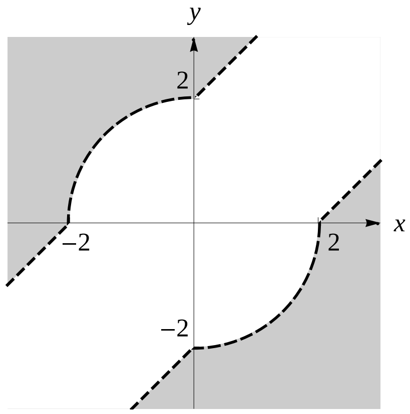
$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x+2 \wedge x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle)\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x-2 \wedge x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 2\cos t, y = 2\sin t,\ t \in \langle \tfrac{\pi}{2}, \pi\rangle \cup \langle -\tfrac{\pi}{2}, 0\rangle)\}.$$

j) $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x^2+y^2<1) \wedge (x \geq 0)\}$

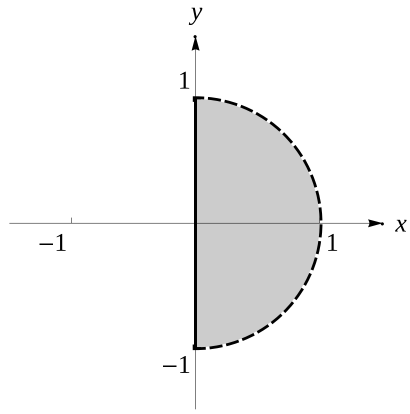
je množina omezená, konvexní, souvislá, není ani otevřená ani uzavřená.

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2=1 \wedge x \geq 0) \vee (x = 0 \wedge |y| \leq 1)\}.$$

i)



j)



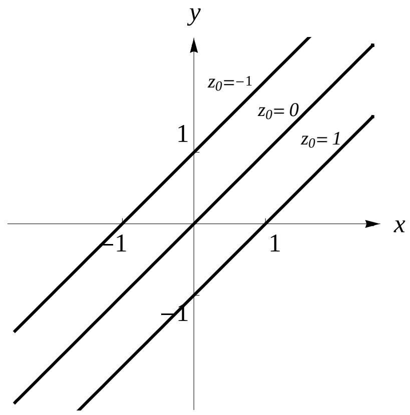
5.12. **a)** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, vrstevnice

$$\begin{aligned} z_0 = -1: &\quad y = x + 1; \\ z_0 = 0: &\quad y = x; \\ z_0 = 1: &\quad y = x - 1 \end{aligned}$$

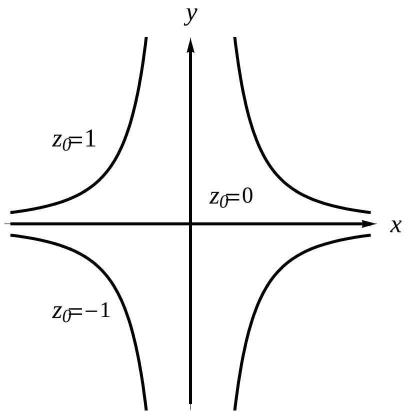
b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, vrstevnice

$$\begin{aligned} z_0 = -1: &\quad y = -\tfrac{1}{x^2} \\ z_0 = 0: &\quad y = 0 \vee x = 0 \\ z_0 = 1: &\quad y = \tfrac{1}{x^2} \end{aligned}$$

a)



b)



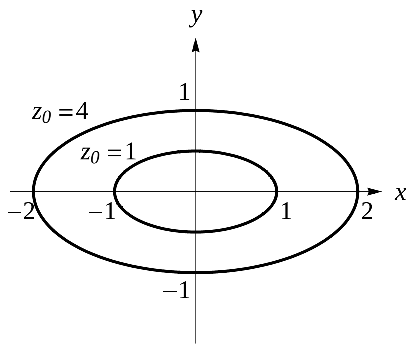
c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $z_0 = 1$: vrstevnice

$$\begin{aligned} z_0 = -1: &\quad \text{neexistuje vrstevnice;} \\ z_0 = 1: &\quad \text{elipsa } x^2 + 4y^2 = 1 \\ z_0 = 2: &\quad \text{elipsa } \tfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{aligned}$$

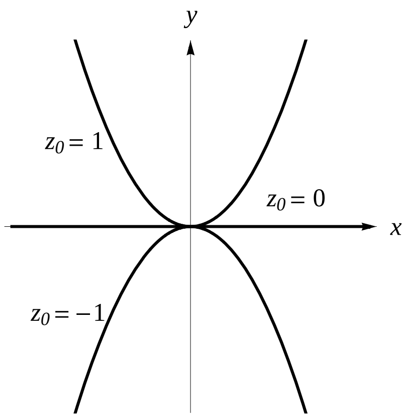
d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$, vrstevnice

$$\begin{aligned} z_0 = -1: &\quad y = -x^2 \\ z_0 = 0: &\quad y = 0 \\ z_0 = 1: &\quad y = x^2 \end{aligned}$$

c)



d)



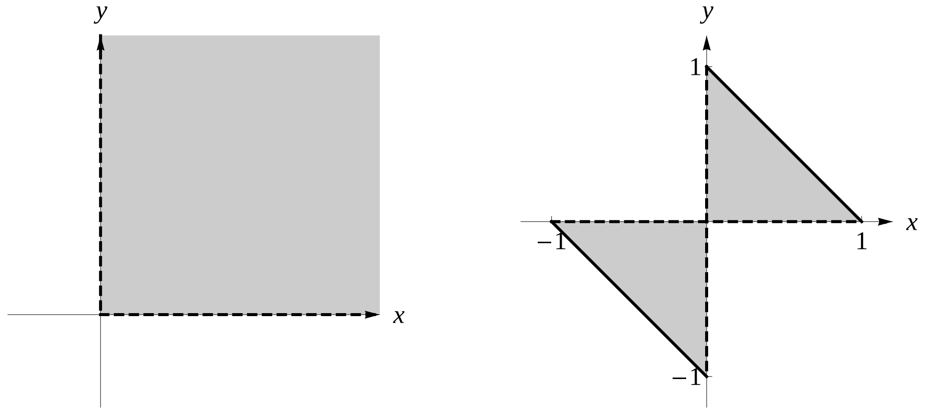
Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

5.14. **a)** $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \wedge y > 0\}$ je množina otevřená, konvexní, souvislá a neomezená. $\mathcal{H}(\mathcal{D}(\boldsymbol{f})) = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\}$.

b) $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; ((x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)) \wedge (-1 - x \leq y \leq 1 - x)\}$ je množina omezená, není ani uzavřená ani otevřená, není konvexní a není souvislá.

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(\boldsymbol{f})) = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle -1,1\rangle\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -1,1\rangle\} \cup$$
$$\cup \{(x,-x-1) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle -1,0\rangle\} \cup \{(x,-x+1) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

a) b)

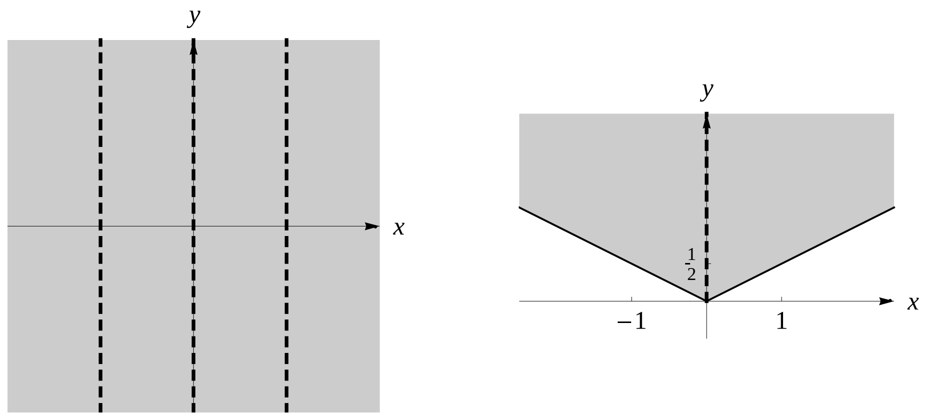


c) $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1\}$ je množina otevřená, neomezená, není konvexní a není souvislá. $\mathcal{H}(\mathcal{D}(\boldsymbol{f})) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1\}$.

d) $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{1}{2} \wedge y \geq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 0\}$ není množina uzavřená ani otevřená, je neomezená, není konvexní a není souvislá.

$\mathcal{H}(\mathcal{D}(\boldsymbol{f})) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (y = \pm\frac{1}{2}x \vee x = 0) \wedge y \geq 0\}$

c) d)



e) $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2 \leq 4) \wedge ((|x| \geq 1 \wedge y \geq 0) \vee ((|x| \leq 1 \wedge y \leq 0))\}$ je množina uzavřená, omezená, souvislá a není konvexní.

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(\boldsymbol{f})) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (y = \sqrt{4 - x^2} \wedge |x| \geq 1) \vee (y = -\sqrt{4 - x^2} \wedge |x| \leq 1)\} \cup$$
$$\cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 2)\} \cup \{(y\,,\pm 1) \in \mathbb{R}^2;\ |y| \leq \sqrt{3})\}$$

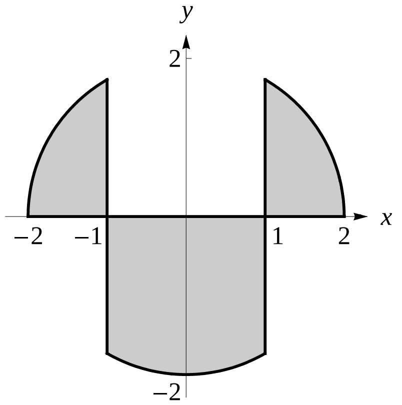
f) $\mathcal{D}(\boldsymbol{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x^2+y^2<1) \wedge (y>x) \wedge (y>-x)\}$

je množina otevřená, omezená, konvexní a souvislá.

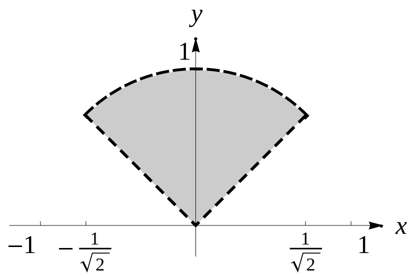
$\mathcal{H}(\mathcal{D}(\boldsymbol{f})) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (y=\sqrt{1-x^2} \wedge |x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}) \vee (y=x \wedge x \in \langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle) \vee$

$\vee (y=-x \wedge x \in \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\rangle)\}$

e)



f)



5.16. **a)** 0. **b)** $\frac{1}{2}$. **c)** 1. **d)** 2.

5.19. **a)** Limita neexistuje. **b)** 0.
c) Limita neexistuje. **d)** 0.
e) Limita neexistuje. **f)** 0.

6 Derivace funkcí více proměnných

6.2. **a)** $\operatorname{grad} f(A) = (-4, 4, -8)$. **b)** $\operatorname{grad} f(A) = (-8, 1, 1)$.
c) $\operatorname{grad} f(A) = (6, 2, 0)$. **d)** $\operatorname{grad} f(A) = (2, 1, 3\ln 3 - 1)$.
e) $\operatorname{grad} f(A) = (3, 1, 1, 1)$. **f)** $\operatorname{grad} f(A) = (-2, -1, 2, 1, 1)$.

6.4. **a)** $Df(A, \vec{a}) = \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{13}}{13}$. **b)** $Df(A, \vec{a}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **c)** $Df(A, \vec{a}) = -\frac{2}{5}\sqrt{5}\ln 3$.
d) $Df(A, \vec{a}) = \frac{7}{10}\sqrt{10}$. **e)** $Df(A, \vec{a}) = 0$. **f)** $Df(A, \vec{a}) = -4$.

6.6. **a)** $Df(A, \vec{a}) = 3\frac{1}{5}$. **b)** $Df(A, \vec{a}) = 0$. **c)** $Df(A, \vec{a}) = \sqrt{6}$.
d) $Df(A, \vec{a}) = -\frac{5}{6}$. **e)** $Df(A, \vec{a}) = \frac{\sqrt{30}}{2}$. **f)** $Df(A, \vec{a}) = -\frac{\sqrt{53}}{53}$.

6.8. **a)** $f(x,y) = \frac{1}{4}(x + \ln y)$. **b)** $f(x,y,z) = xyz$.

c) $f(x) = 5|x| \operatorname{tg} x$. **d)** $f(x,y,z) = \cos^3 y + x + \sqrt{z}$.

6.11. **a)** $g(a,b)$; $\boldsymbol{h}(x,y) = (x^2,\ xy^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln y + 2x\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y)) + y^2\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y))\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y} + 2xy\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)).$$

b) $g(a,b)$; $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (yz,\ \mathrm{e}^x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z\mathrm{e}^x\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z^2\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = g(\boldsymbol{h}(x,y,z)) + yz\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)).$$

c) $g(a,b,c)$; $\boldsymbol{h}(x) = (2,\ \ln x,\ x^3)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x)) - g(\boldsymbol{h}(x))\right] + 3x\,\frac{\partial g}{\partial c}(\boldsymbol{h}(x)).$$

d) $g(a)$; $h(x,y,z) = y^2 - \sin(xz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -z\cos(xz)\,g'(h(x,y,z)),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y\,g'(h(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -x\cos(xz)\,g'(h(x,y,z)).$$

e) $g(a,b,c)$; $\boldsymbol{h}(x,y) = (2x,\ \sqrt{x^2+y},\ 1-y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\cos x}{y} + 2\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y))\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y}}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sin x}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y))\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} - \frac{\partial g}{\partial c}(\boldsymbol{h}(x,y)).$$

f) $g(a,b)$; $\boldsymbol{h}(x,y) = (\frac{x}{y},\ \frac{y}{x})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{g(\boldsymbol{h}(x,y))}{x^2} + \frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y)) - \frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y)) + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)).$$

g) $g(a,b)$; $\boldsymbol{h}(x) = (\ln x^2,\ \cos^2 x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot g(\boldsymbol{h}(x)) + \operatorname{arctg} x\left[\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x))\cdot\frac{2}{x} - \frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x))\cdot\sin 2x\right].$$

h) $g(a)$; $h(x,y,z) = xy + xz^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{z}\cdot g(h(x,y,z)) + \frac{x^2(y+z^2)}{z}\cdot g'(h(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x^3}{z}\,g'(h(x,y,z)),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x^2}{z^2}\,g(h(x,y,z)) + 2x^3g'(h(x,y,z)).$$

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

i) $g(a,b)$; $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (\frac{z}{x^2},\ 2e^y\sqrt{z})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2x+y}} - \frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) \cdot \frac{2z}{x^3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} + \frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) \cdot 2e^y\sqrt{z}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) \cdot \frac{e^y}{\sqrt{z}}\,.$$

j) $g(a,b,c)$; $\boldsymbol{h}(x) = (7,\ x^3,\ \operatorname{tg} x)$

$$f'(x) = 3\,g(\boldsymbol{h}(x)) + 9x^3\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x)) + \frac{3x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\partial g}{\partial c}(\boldsymbol{h}(x)).$$

k) $g(a)$; $h(x,y) = \arcsin x + 7y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y \cdot g'(h(x,y))}{[g(h(x,y))]^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{g(h(x,y)) - 7y \cdot g'(h(x,y))}{[g(h(x,y))]^2}\,.$$

l) $g(a,b,c)$; $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (e^{yz},\ 8x,\ \frac{1}{\sqrt{y}})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 32\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4ye^{yz}\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4ze^{yz}\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) - \frac{2}{\sqrt{y^3}} \cdot \frac{\partial g}{\partial c}(\boldsymbol{h}(x,y,z)).$$

6.13. **a)** $\frac{\partial f}{\partial x}(3,0) = 6.$ **b)** $f'(0) = -1.$ **c)** $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = -\frac{3}{4}\pi.$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -\frac{\pi}{4}.$ **e)** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1.$ **f)** $f'(1) = 3.$

g) $\frac{\partial f}{\partial z}(\pi,0,1) = 0.$ **h)** $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,3) = \frac{3}{2}.$ **i)** $\frac{\partial f}{\partial x}(2\pi,1) = -12.$

6.15. **a)** $g(a,b)$; $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (3xz-5,\ 2yz)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 9z^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x,y,z)), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 1 + 6z^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 3\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) + 9xz\,\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) + 6yz\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 4z^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 2\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) + 6xz\,\frac{\partial^2 g}{\partial b \partial a}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) + 4yz\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x,y,z)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 9x^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) + 12xy\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x,y,z)) + 4y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x,y,z)).$$

b) $g(a)$; $h(x,y) = \sqrt{y} + 3x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6\,g'(h(x,y)) + 9x\,g''(h(x,y)),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{g'(h(x,y)) + 3x\,g''(h(x,y))}{2\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x}{4y}\left(g''(h(x,y)) - \frac{g'(h(x,y))}{\sqrt{y}}\right).$$

c) $g(a,b)$; $\boldsymbol{h}(x,y) = (\frac{x}{2},\, \mathrm{e}^{xy})$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x,y))}{4} + y\mathrm{e}^{xy}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)) + y\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)) + y\mathrm{e}^{xy}\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x,y))\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\left[\frac{x}{2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)) + (xy+1)\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)) + xy\,\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x,y))\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2y}{(1+y^2)^2} + x^2\mathrm{e}^{xy}\left[\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x,y)) + \mathrm{e}^{xy}\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x,y))\right].$$

d) $g(a,b,c)$; $\boldsymbol{h}(x) = (x^2,\, \sin x,\, 7x)$

$$f''(x) = 2\,\frac{\partial g}{\partial a}(\boldsymbol{h}(x)) - \sin x\,\frac{\partial g}{\partial b}(\boldsymbol{h}(x)) + 4x\left[x\,\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(\boldsymbol{h}(x)) + \cos x\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(\boldsymbol{h}(x)) + \right.$$
$$\left. +7\,\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial c}(\boldsymbol{h}(x))\right] + \cos^2 x\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^2}(\boldsymbol{h}(x)) + 14\cos x\,\frac{\partial^2 g}{\partial b \partial c}(\boldsymbol{h}(x)) + 49\,\frac{\partial^2 g}{\partial c^2}(\boldsymbol{h}(x)).$$

6.16. **a)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \tfrac{1}{2}) = -4.$ **b)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1, \sqrt{2}, 3) = \dfrac{1}{36}.$ **c)** $f''(1) = 3.$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1, -1, 1) = 1.$

6.18. $$\kappa = \frac{RT}{V_0 p^2}\left(z - p\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_T\right), \quad \alpha = \frac{R}{V_0 p}\left(z + T\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p\right).$$

6.19. $$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{V^2}\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T.$$

6.20. $$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

6.22. **a)** $J_{\boldsymbol{f}}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$. **b)** $J_{\boldsymbol{f}}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **c)** $J_{\boldsymbol{f}}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 18 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $J_{\boldsymbol{f}}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. **e)** $J_{\boldsymbol{f}}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

f) $J_{\boldsymbol{f}}(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$. **g)** $J_{\boldsymbol{f}}(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ln 10} & \frac{1}{\ln 10} \\ 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

6.24. **a)** $\mathrm{d}f = \dfrac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{\mathrm{d}y}{x}$, $\quad \mathrm{d}f(A) = 3\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

b) $\mathrm{d}f = 2x\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y$, $\quad \mathrm{d}f(A) = 2\,\mathrm{d}y - 4\,\mathrm{d}x$.

c) $\mathrm{d}f = \dfrac{\mathrm{d}x}{y\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\arcsin x}{y^2}\,\mathrm{d}y$, $\quad \mathrm{d}f(A) = -\,\mathrm{d}x$.

d) $\mathrm{d}f = \dfrac{\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y}{x+y^2}$, $\quad \mathrm{d}f(A) = \mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y$.

e) $\mathrm{d}f = y^2\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x + (1+xy)\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y$, $\quad \mathrm{d}f(A) = \mathrm{e}^3\,(3\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y)$.

f) $\mathrm{d}f = \dfrac{1}{2y^2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}\,(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$, $\quad \mathrm{d}f(A) = \dfrac{\mathrm{d}y}{16} - \dfrac{\mathrm{d}x}{4}$.

6.26. **a)** $\mathrm{d}f(A) = -0,25\,,\ \triangle f(A) \doteq -0,240246,\ \triangle f - \mathrm{d}f \doteq 0,009754.$

b) $\mathrm{d}f(A) = -0,036\,,\ \triangle f(A) \doteq -0,0359996,\ \triangle f - \mathrm{d}f \doteq 0,0000004.$

c) $\mathrm{d}f(A) = 0,10\overline{6}\,,\ \triangle f(A) \doteq 0,102256,\ \triangle f - \mathrm{d}f \doteq -0,004411.$

d) $\mathrm{d}f(A) = 0,015\,,\ \triangle f(A) \doteq 0,014084,\ \triangle f - \mathrm{d}f \doteq -0,000916.$

e) $\mathrm{d}f(A) = 0,3\,,\ \triangle f(A) \doteq 0,252439,\ \triangle f - \mathrm{d}f \doteq -0,047561.$

f) $\mathrm{d}f(A) = 0,2\,,\ \triangle f(A) \doteq 0,23026,\ \triangle f - \mathrm{d}f \doteq 0,03026.$

6.28. $u(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$, $\mathrm{d}u \doteq -1,213\,\mathrm{cm}$, úhlopříčka se přibližně zmenší o $1,213\,\mathrm{cm}$.

6.29. $S(\alpha, r) = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360}$, $\mathrm{d}S = 0 \implies \mathrm{d}r = 1,25\,\mathrm{mm}$, plocha výseče se nezmění, zvětší-li se poloměr přibližně o $1,25\,\mathrm{mm}$.

6.30. $V(r,v) = \frac{1}{3}\,\pi r^2 v$, $\mathrm{d}V \doteq 34,204\,\mathrm{cm}^3$, objem kužele se přibližně zvětší o $34,204\,\mathrm{cm}^3$.

6.31. $p(T,V) = \dfrac{RT}{V}$, $\mathrm{d}p \doteq 2\,431\,\mathrm{Pa} = 2,431 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{MPa}$, tlak vzroste přibližně o $2\,431\,\mathrm{Pa}$.

6.33. **a)** $12x - 36y + z - 48 = 0$. **b)** $6x - 6y - z + 1 = 0$. **c)** $2x + y - z - 1 = 0$.

d) $2x - z - 1 = 0$. **e)** $2x - z = 0$. **f)** $3x - y - 3z + 9 = 0$.

g) $z + 1 = 0$. **h)** $7\ln 2\,x - y + z - 1 = 0$.

6.34. **a)** Sféra; $z(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $M=(-2,2,2\sqrt{2})$ $\Rightarrow$ $x-y-\sqrt{2}\,z+8=0$.

b) Rotační elipsoid; $z(x,y)=-\sqrt{\dfrac{34-x^2-y^2}{2}}$, $M=(1,-1,-4)$ $\Rightarrow$
$x-y-8z-34=0$.

c) Rotační paraboloid; $z(x,y)=\dfrac{-x^2-y^2}{4}$, $M=(4,-4,-8)$ $\Rightarrow$
$2x-2y+z-8=0$.

d) Eliptický paraboloid; $z(x,y)=2x^2+y^2$, $M=(1,1,3)$ $\Rightarrow$ $4x+2y-z-3=0$.

e) Rotační jednodílný hyperboloid; $z(x,y)=-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{5}-1}$, $M=(-4,3,-2)$ $\Rightarrow$
$4x-3y-10z+5=0$.

f) Dvoudílný hyperboloid; $z(x,y)=\sqrt{\dfrac{9x^2+y^2+2}{4}}$, $M=(1,5,3)$ $\Rightarrow$
$9x+5y-12z+2=0$.

g) Rotační kuželová plocha; $z(x,y)=-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{13}}$, $M=(2,3,-1)$ $\Rightarrow$
$2x+3y+13z=0$.

h) Rotační válcová plocha; $z(x,y)=\sqrt{25-x^2}$, $M=(-3,10,4)$ $\Rightarrow$
$3x-4z+25=0$.

6.36. **a)** $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y$; $(x_0,y_0)=(0,0)$; $T_2(x,y)=xy$; $\sin 0,08\cdot\sin 0,3\doteq 0,024$.

b) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\,\ln y$; $(x_0,y_0)=(0,1)$; $T_2(x,y)=y-1+x(y-1)-\frac{1}{2}\,(y-1)^2$;
$\mathrm{e}^{-0,05}\ln 1,01\doteq 0,00945$.

c) $f(x,y)=x^8\operatorname{arctg} y$; $(x_0,y_0)=(1,0)$; $T_2(x,y)=y+8y(x-1)$;
$1,03^8\operatorname{arctg} 0,1\doteq 0,124$.

d) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\,\cos^2 y$; $(x_0,y_0)=(0,0)$; $T_2(x,y)=1+x+\frac{x^2}{2}-y^2$;
$\mathrm{e}^{0,04}\cos^2 0,02\doteq 1,0404$.

e) $f(x,y)=\frac{1}{2}\,\ln(x^2+y^2)$; $(x_0,y_0)=(1,0)$; $T_2(x,y)=x-1-\frac{1}{2}\,(x-1)^2+\frac{y^2}{2}$;
$\ln\sqrt{0,96^2+0,03^2}\doteq -0,04035$.

f) $f(x,y)=\mathrm{e}^{y\ln x}$; $(x_0,y_0)=(1,1)$; $T_2(x,y)=x+(x-1)(y-1)$; $1,02^{0,91}\doteq 1,0182$.

g) $f(x,y)=\ln x\cdot\ln y$; $(x_0,y_0)=(1,1)$; $\ln 0,94\cdot\ln 1,05\doteq -0,003015$;
$T_3(x,y)=(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}\,(x-1)^2(y-1)-\frac{1}{2}\,(x-1)(y-1)^2$.

h) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\,\cos y$; $(x_0,y_0)=(0,0)$; $T_3(x,y)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{xy^2}{2}$;
$\mathrm{e}^{0,1}\cos 0,06\doteq 1,10318\bar{6}$.

6.38. **a)** $\dfrac{\cos x}{1+\sin y}\doteq 1-y-\dfrac{x^2}{2}+y^2$. **b)** $4\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+y}\doteq \pi-2x-2y-x^2+y^2$.

c) $\operatorname{tg}(2x+3y)\doteq 2x+3y$. **d)** $6\sin x\,\cos y\doteq 6x-x^3-3xy^2$.

e) $e^{x^2-y^2} \doteq 1 + x^2 - y^2.$ **f)** $\sqrt[3]{8+x^2+y^2} \doteq 2 + \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{12}.$

g) $6\,e^{-x}\ln(1+y) \doteq 6y - 6xy - 3y^2 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3.$

h) $\dfrac{8}{\sqrt{1-x+y}} \doteq 8 + 4x - 4y + 3x^2 - 6xy + 3y^2.$

6.41. **a)** 1 řešení: ve IV. kvadrantu, $(x_1, y_1) = (\,1,1\,; -0,7\,)\,.$

b) 2 řešení: v I. a III. kvadrantu, $(x_1, y_1) = (1,23333\,; 1,26667)\,.$

c) 2 řešení: v I. a IV. kvadrantu, $(x_1, y_1) = (1,92274, -0,65452)\,.$

d) 2 řešení: na ose x a y, $(x_1, y_1) = (\frac{17}{5}\,, \frac{-2}{5})\,.$

e) 2 řešení: v I. kvadrantu, $(x_1, y_1) = (0,10688\,; 1,02500)\,.$

f) 4 řešení: v I. kvadrantu, $(x_1, y_1) = (\frac{61}{11}, \frac{39}{22}) = (5,54545\,; 1,77273)\,.$

6.42. **a)**

k	x_k	y_k	E_k
0	1	1	
1	3	2	3,00000
2	2,23913	1,69022	1,07065

b)

k	x_k	y_k	E_k
0	0	2	
1	-0,25000	1,87500	0,37500
2	-0,29145	1,84873	0,06772

c)

k	x_k	y_k	E_k
0	2	2	
1	1,87500	1,62500	0,50000
2	1,78768	1,48579	0,22653

d)

k	x_k	y_k	E_k
0	1	-1	
1	1,5	-2	1,50000
2	1,37427	-1,58480	0,54093

7 Extrémy funkcí dvou proměnných

7.2. **a)** Lok. min. $f(-1,3) = 0\,.$ **b)** Lok. max. $f(1,0) = \frac{3}{2}\,.$

c) Lok. max. $f(0,0) = e\,.$ **d)** Lok. max. $f(0,0) = 1\,,\ f \notin C^1$ v $[0,0]$.

(Zadání a) a c) řešíme doplněním na čtverec.)

7.5. **a)** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, 5 stac. bodů: $[\,0,0\,], [\,1,1\,], [-1,1\,], [-1,-1\,], [\,1,-1\,]\,.$

b) $\mathcal{D}(f) = \{[x,y], x > 0\}$, f nemá lok. extrémy, $[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2}] \notin \mathcal{D}(f)\,,$

c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, stac. body: $\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{j\pi}{2}\right]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\,.$

7.6. **a)** $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, lok. min. v $[\,4,-2\,]$, $f(\,4,-2\,)=-12$.

b) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\times(0,\infty)$, neexistují lok. extrémy, sedlový bod v $[\,0,1\,]$.

c) $\mathcal{D}(f)=\{\,[x,y], x\neq 0\}$, neexistují lok. extrémy, sedlový bod v $[\,-50,\frac{4}{5}\,]$.

d) $\mathcal{D}(f)=\{\,[x,y]:y>-x^2\,\}$, neexistují lok. extrémy, sedlový bod v $[\,0,1\,]$.

e) $\mathcal{D}(f)=\{[x,y], y\neq 0,\ y\neq -x\}$, neexistuji lok. extrémy ani sedlový bod.

f) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, lok. min. v $[\,-2,3\,]$, $f(\,-2,3)=3$.

g) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, lok. max. v $[\,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\,]$, $f(\,\frac{4}{3},\frac{4}{3})=\frac{64}{27}$, sedlové body v $[\,0,4\,]$, $[\,4,0\,]$ a $[\,0,0\,]$.

h) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, lok. min. v $[\,1,1\,]$, $f(\,1,1)=0$.

i) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, neexistují stac. body, tj. neexistují lok. extrémy.

j) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, lok. max. v $[\,1,0\,]$, $f(\,1,0\,)=2$, lok. min. v $[\,-1,0\,]$, $f(\,-1,0\,)=-2$, sedlové body v $[\,0,-1\,]$ a $[\,0,1]$.

k) $\mathcal{D}(f)=\{[x,y], x\neq 0,\ y\neq 0\}$, lok. min. v $[\,2,5\,]$, $f(\,2,5\,)=3$.

l) $\mathcal{D}(f)=\{\,[x,y], x>-y^2\,\}$, lok. min. v $[\,\frac{1}{\mathrm{e}},0\,]$, $f(\,\frac{1}{\mathrm{e}},0\,)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$, sedlové body v $[\,0,1\,]$ a $[\,0,-1\,]$.

m) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, lok. min. v $A_{1,2}=\pm[\,\sqrt{2},-\sqrt{2}\,]$, $f(A_1)=f(A_2)=-8$, ve stac. bodě $A_3=[0,0]$ nelze rozhodnout, neboť $H_f(A_3)=0$.

n) $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}^2$, lok. max. v $[\frac{\sqrt{2}}{2},0\,]$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2},0\,)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, lok. min. v $[\,-\frac{\sqrt{2}}{2},0\,]$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

o) $\mathcal{D}(f)=\{\,[x,y], x>0, y>0\}$, lok. min. v $[\,1,2\,]$, $f(\,1,2\,)=7-10\ln 2$.

7.8. $f(y,z)=(5-y-3z)^2+y^2+z^2$, $P=[\,\frac{5}{11},\frac{5}{11},\frac{15}{11}\,]$,
geometricky: nejbližší bod v rovině leží na kolmici k této rovině procházející bodem $[0,0]$.

7.9. $f(a,b)=a\,b+\dfrac{64}{a}+\dfrac{64}{b}$, $a=4$, $b=4$, $c=2$. Nejmenší povrch: $48\,\mathrm{m}^2$.

7.10. $f(x,y)=(x-40)(80-7x+6y)+(y-60)(140+4x-5y)$, $x=80$ Kč , $y=100$ Kč. Zisk: 3200 Kč .

7.11. $f(x,y)=x\,y\,(\frac{L}{4}-x-y)$, $x=y=z=\frac{L}{12}$.

7.13. **a)** $y=-\frac{2x}{3}+\frac{5}{2}$. **b)** $y=-0,9\,x+2,3$.

c) $y=0,28\,x-0,41$. **d)** $y=0,25\,x+0,35$.

8 Implicitně zadané funkce

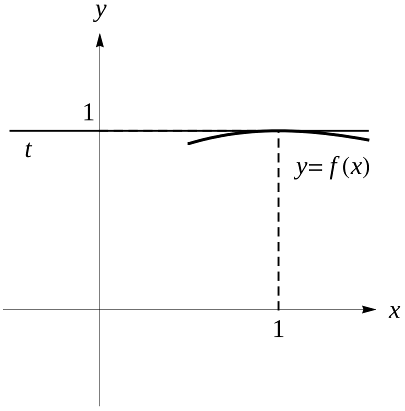
8.3. **a)** Rovnice implicitně definuje funkci proměnné x, také funkci proměnné y.
b) Rovnice implicitně definuje funkci proměnné x.
c) Rovnice implicitně definuje funkci proměnné y.
d) Rovnice implicitně definuje funkci proměnné x, také funkci proměnné y.
e) Rovnice implicitně definuje funkci proměnné x.
f) Podle věty o existenci implicitní funkce neumíme rozhodnout.
g) Bod A nesplňuje rovnici, rovnice nemůže definovat na okolí bodu A žádnou funkci.
h) Rovnice implicitně definuje funkci proměnné y.

8.6. **a)** $f(3) = 0,\ f'(3) = -\frac{1}{3},\ f''(3) = \frac{4}{27}$. **b)** $f(-2) = 2,\ f'(-2) = -4,\ f''(-2) = 2$.
c) $f(1) = 1,\ f'(1) = 0,\ f''(1) = 1$. **d)** $f(1) = -1,\ f'(1) = -\frac{2}{3},\ f''(1) = -\frac{1}{27}$.

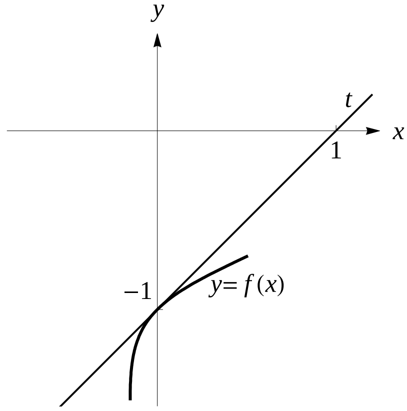
8.7. **a)** $g(1) = 0,\ g'(1) = \frac{1}{2},\ g''(1) = -\frac{5}{8}$. **b)** $g(0) = 2,\ g'(0) = -1,\ g''(0) = 0$.

8.9. **a)** $f(1) = 1,\ f'(1) = 0,\ f''(1) = -\frac{1}{2}$. Funkce f není na okolí bodu $x_0 = 1$ monotónní, je konkávní, v bodě $x_0 = 1$ má lokální max. $y_0 = 1$. Rovnice tečny je $y = 1$.
b) $f(0) = -1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -5$. Funkce f je na okolí bodu $x_0 = 0$ rostoucí, konkávní. Rovnice tečny je $y = x - 1$.

a)



b)

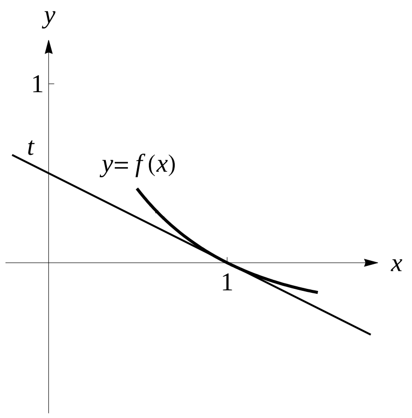


Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

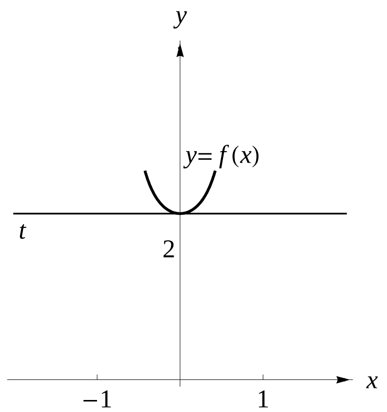
c) $f(1) = 0$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{7}{8}$. Funkce f je na okolí bodu $x_0 = 1$ klesající, konvexní. Rovnice tečny je $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

d) $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 4$. Funkce f není na okolí bodu $x_0 = 0$ monotónní, je konvexní, v bodě $x_0 = 0$ má lokální min. $y_0 = 2$. Rovnice tečny je $y = 2$.

c)



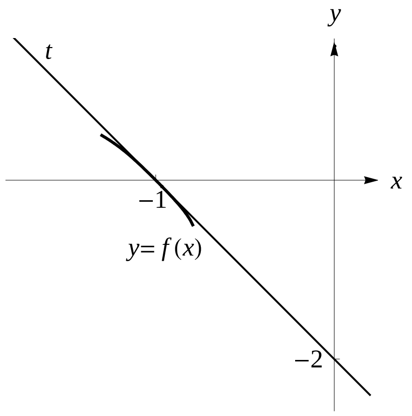
d)



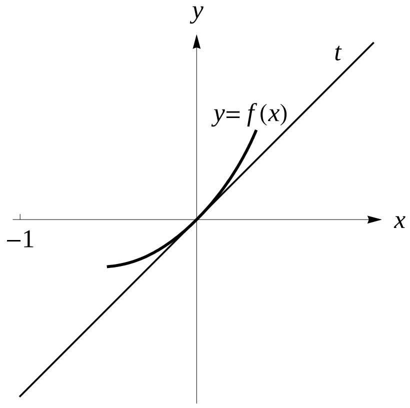
e) $f(-1) = 0$, $f'(-1) = -2$, $f''(-1) = -1$. Funkce f je na okolí bodu $x_0 = -1$ klesající, konkávní. Rovnice tečny je $y = -2x - 2$.

f) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$. Funkce f je na okolí bodu $x_0 = 0$ rostoucí, konvexní. Rovnice tečny je $y = x$.

e)



f)



8.11. **a)** $T_2(x) = 1 + x + \frac{3}{2}\,x^2$, $f(-0,1) \doteq 0,915$.

b) $T_2(x) = 1 - \frac{3}{2}\,(x+1) - \frac{1}{16}\,(x+1)^2$, $f(-0,9) \doteq 0,849375$.

c) $T_2(x) = 1 - x + \frac{3}{2}\,(x-1)^2$, $f(0,95) \doteq 0,05375$.

d) $T_2(x) = 2 - 2x$, $f(0,11) \doteq 1,78$.

e) $T_2(x) = -1 + \frac{1}{6}\,(x-2)^2$, $f(1,9) \doteq -0,998\overline{3}$.

f) $T_2(x) = 2 - x + \frac{1}{2}\,(x-1)^2$, $f(1,05) \doteq 0,95125$.

8.13. **a)** $t\colon\ y - 1 = 0$, $\ n\colon\ x = 0$. **b)** $t\colon\ x - 1 = 0$, $\ n\colon\ y + 1 = 0$.

c) $t\colon\ 3x - 2y - 1 = 0$, $\ n\colon\ 2x + 3y - 5 = 0$.

d) $t\colon\ \pi x - 2y + 2\pi = 0$, $\ n\colon\ 4x + 2\pi y + 4 - \pi^2 = 0$.

8.14. **a)** $\alpha = 90°$. **b)** $\alpha = 30°$. **c)** $\alpha = 45°$. **d)** $\alpha = 60°$.

8.16. **a)** Rovnice implicitně definuje funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$, $x = g(y, z)$.
b) Rovnice implicitně definuje funkce $z = f(x, y)$, $x = g(y, z)$, $y = h(x, z)$.
c) Rovnice implicitně definuje funkci dvou proměnných $y = h(x, z)$.
d) Rovnice implicitně definuje funkce $z = f(x, y)$, $x = g(y, z)$, $y = h(x, z)$.
e) Rovnice implicitně definuje funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$.
f) Rovnice implicitně definuje funkci dvou proměnných $x = g(y, z)$.

8.19. **a)** $f(1,-1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1) = -1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = -2$.
b) $f(-1,0) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = -2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,0) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) = 4$.
c) $f(-1,2) = 4$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = \dfrac{25}{4}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,2) = \dfrac{5}{4}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,2) = 0$.
d) $f(3,1) = -3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -9$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,1) = -2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1) = 10$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,1) = -90$.

8.20. **a)** $g(-1,\frac{1}{2}) = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,\frac{1}{2}) = 1$, $\dfrac{\partial g}{\partial z}(-1,\frac{1}{2}) = 0$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(-1,\frac{1}{2}) = \dfrac{5}{4}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(-1,\frac{1}{2}) = -2$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}(-1,\frac{1}{2}) = 0$.
b) $g(1,1) = -1$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1) = \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = 0$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}(1,1) = -1$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(1,1) = -2$.

8.21. **a)** $h(1,0) = -1$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,0) = 1$, $\dfrac{\partial h}{\partial z}(1,0) = -1$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,0) = -2$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}(1,0) = 3$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2}(1,0) = -6$.
b) $h(1,1) = 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,1) = -2$, $\dfrac{\partial h}{\partial z}(1,1) = -1$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,1) = -2$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}(1,1) = -1$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2}(1,1) = 1$.

8.23. **a)** Hodnota $z = -1$ je lokálním maximem. Rovnice tečné roviny je $z = -1$.
b) Bod $(2, -1)$ není stacionární, funkce v něm nemůže mít extrém. Rovnice tečné roviny je $z = \frac{1}{4}(y + 1)$.
c) Hodnota $z = 1$ je lokálním minimem. Rovnice tečné roviny je $z = 1$.
d) Hodnota $z = 1$ je lokálním maximum. Rovnice tečné roviny je $z = 1$.
e) V bodě $(1, 1)$ funkce nemá lokální extrém, je to sedlový bod. Rovnice tečné roviny je $z = 1$.
f) Bod $(1, 2)$ není stacionární, funkce v něm nemůže mít extrém. Rovnice tečné roviny je $z = -\frac{y}{2}$.
g) Hodnota $z = 1$ je lokálním maximem. Rovnice tečné roviny je $z = 1$.

8.25. **a)** $\mathrm{d}f(1, -2) = -\frac{\mathrm{d}x}{3} - \frac{\mathrm{d}y}{12}$, $\triangle f = f(0{,}9\,; -1{,}8) - f(1, -2) \doteq 0{,}01\bar{6}$.
b) $\mathrm{d}f(0, 1) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, $\triangle f = f(0{,}15\,; 1{,}05) - f(0, 1) \doteq 0{,}2$.
c) $\mathrm{d}f(1, -1) = \frac{4}{5}\,\mathrm{d}x - \frac{6}{5}\,\mathrm{d}y$, $\triangle f = f(1{,}05\,; -0{,}8) - f(1, -1) \doteq -0{,}2$.
d) $\mathrm{d}f(2, 0) = -\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{3}$, $\triangle f = f(2{,}03\,; -0{,}12) - f(2, 0) \doteq 0{,}03$.

8.27. **a)** $T_2(x, y) = 1 + x - y - \frac{x^2}{2} + x(y - 2)$, $f(0{,}06\,; 2{,}1) \doteq -1{,}0358$.
b) $T_2(x, y) = -3 + x + 5y + 3(x + 2)^2 + 21(x + 2)(y - 1) + 68(y - 1)^2$, $f(-2{,}05\,; 1{,}15) \doteq 1{,}315$.
c) $T_2(x, y) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{8}(x - 1)(y + 2) - \frac{1}{32}(y + 2)^2$, $f(0{,}8\,; -2{,}08) \doteq -0{,}6032$.
d) $T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + 2(y - 1) + \frac{21}{32}(x - 1)^2 + \frac{7}{2}(x - 1)(y - 1) + 3(y - 1)^2$, $f(0{,}88\,; 1{,}12) \doteq 1{,}18225$.

8.28. **a)** $f(x, y) \doteq 1 + y$.
b) $f(x, y) \doteq -1 + x$.
c) $f(x, y) \doteq -1 + x + 2y + x^2 + 2xy$.
d) $f(x, y) \doteq 3 - 3x + 3y + \frac{3}{2}\,x^2 - 4xy + \frac{3}{2}\,y^2$.

8.30. **a)** $x - 2y + z - 2 = 0$.
b) $x - 2y - 2z + 1 = 0$.
c) $x - 4z + 3 = 0$.
d) $2x - y - 4 = 0$.

8.31. S rovinou xy: $(0, 3, -7)$, $(0, 3, 3)$. S rovinou xz: $(0, -2, -2)$, $(0, 8, -2)$. S rovinou yz: $(-5, 3, -2)$, $(5, 3, -2)$.

8.32. $x + y + z - 7 = 0$.

8.33. $$\mathrm{d}T = \frac{(V - b + \frac{a}{R}\,T^{-\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}P + P\,\mathrm{d}V}{R + \frac{3aP}{2R}\,T^{-\frac{5}{2}}}.$$

8.34. $$S = S(T(P, V), P) \implies \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \cdot \frac{V - b + \frac{a}{R}\,T^{-\frac{3}{2}}}{R + \frac{3aP}{2R}\,T^{-\frac{5}{2}}} + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T.$$

8.35. $\triangle V \doteq \mathrm{d}V = \dfrac{V^3[R\,\mathrm{d}T + (b-V)\,\mathrm{d}P]}{PV^3 + a(2b-V)}\,.$

8.36. $z = z(T,\ P(T,V)) \implies \gamma = \dfrac{R}{P_0} \cdot \dfrac{z + T \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_P}{V - RT \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial P}\right)_T}\,.$

9 Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

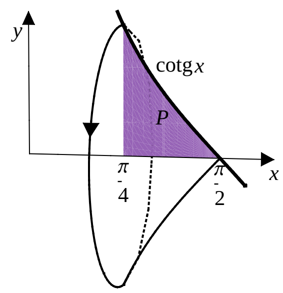
9.2. **a)** $l = \frac{56}{27}$. **b)** $l = \frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)$. **c)** $l = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. **d)** $l = 2\sqrt{3}$.

9.3. $l = \frac{1}{2}\ln 3$.

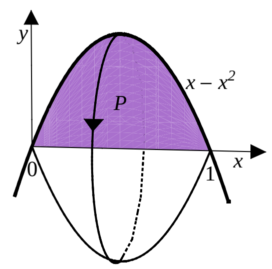
9.5. **a)** $l = 6\sqrt{3}$. **b)** $l = 8 - 4\sqrt{2}$. **c)** $l = \sqrt{2}\,\pi$. **d)** $l = 2$.

9.6. **a)** $l = 2 + \ln\frac{3}{2}$. **b)** $l = 8$.

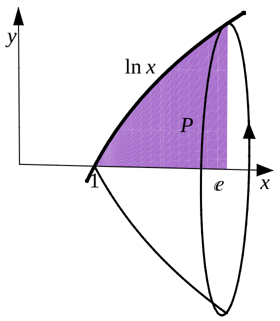
9.8. **a)** $V = (1 - \frac{\pi}{4})\pi$.



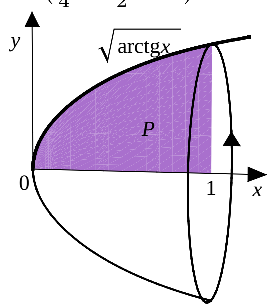
b) $V = \frac{\pi}{30}$.



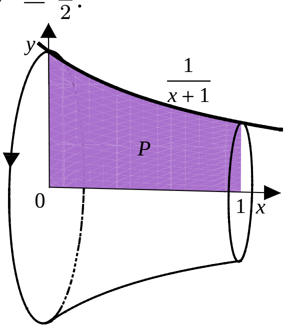
c) $V = (\mathrm{e} - 2)\pi$.



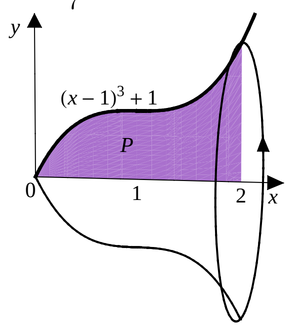
d) $V = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2)\pi$.



e) $V = \frac{\pi}{2}$.

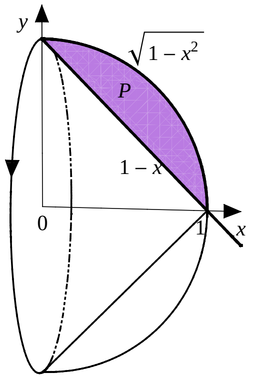


f) $V = \frac{16}{7}\pi$.

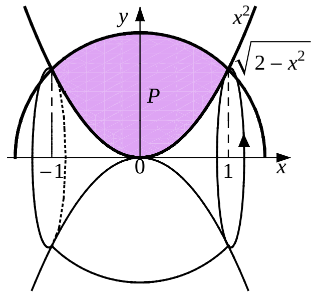


Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

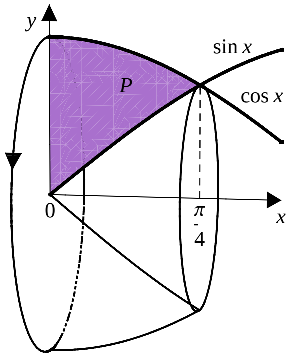
9.10. **a)** $V = \frac{\pi}{3}$.



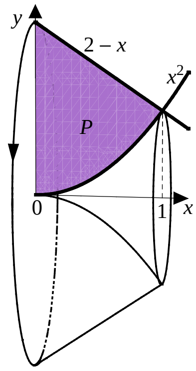
b) $V = \frac{22}{15}\pi$.



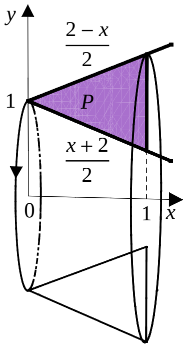
c) $V = \frac{\pi}{2}$.



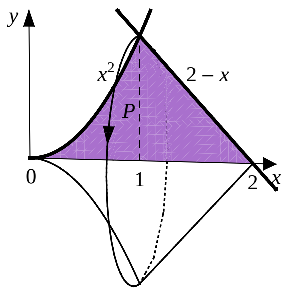
d) $V = \frac{32}{15}\pi$.



e) $V = \pi$.

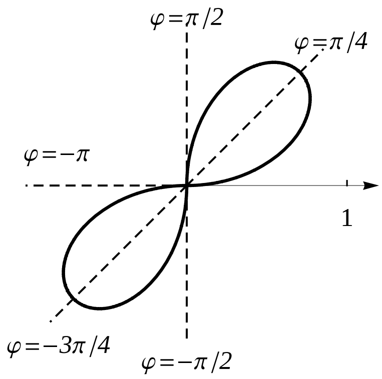


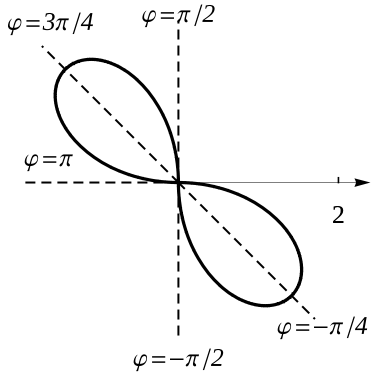
f) $V = \frac{8}{15}\pi$.



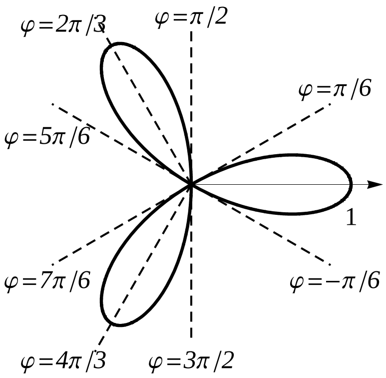
Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

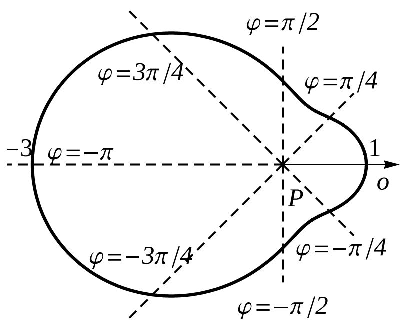
9.12. **a)** $P = 2\,\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ **b)** $P = 2\,\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4\sin^2 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \pi$





c) $P = 3\,\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ **d)** $P = 2\,\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (2 - \sin^2\varphi - \cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{23}{4}\pi$





10 Dvojný integrál

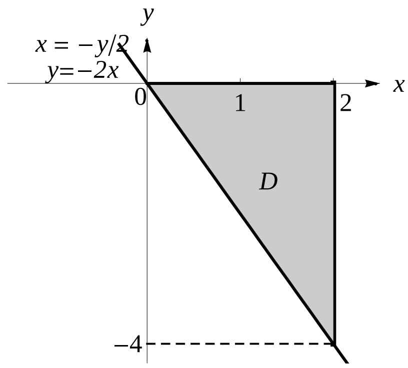
10.3. **a)** 108. **b)** $8(\mathrm{e}-1)$. **c)** $\frac{\pi}{12}$. **d)** $\frac{3}{2}$.

e) $\ln 8 - \frac{5}{4}$. **f)** $\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{2}$. **g)** $\ln\frac{25}{24}$. **h)** $\frac{1}{4}\pi^2 - 2$.

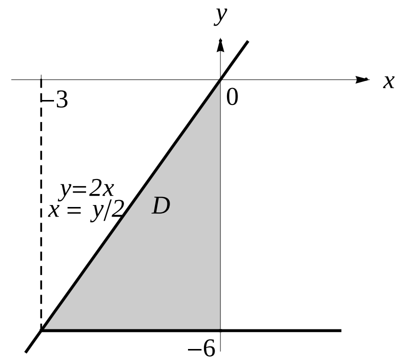
10.5. **a)** $\displaystyle\int_{-4}^{0}\left(\int_{-y/2}^{2}\cos\frac{x-y}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{0}^{2}\left(\int_{-2x}^{0}\cos\frac{x-y}{x}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=2(\sin 3\,-\,\sin 1).$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{0}\left(\int_{-6}^{2x}\sin\frac{\pi x}{y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-6}^{0}\left(\int_{y/2}^{0}\sin\frac{\pi x}{y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{18}{\pi}.$

a)

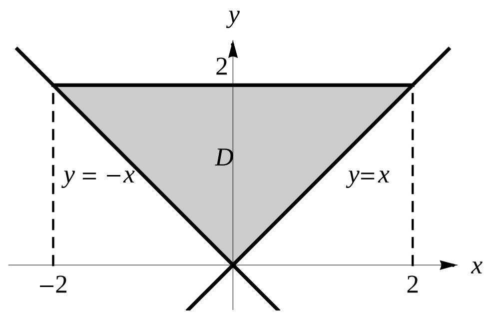


b)



c) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(\int_{-x}^{2}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left(\int_{x}^{2}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\left(\int_{-y}^{y}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(-5+\mathrm{e}^{4}).$

c)



10.6. **a)** $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\int_{x}^{2x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_{2}^{4}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

b) $\displaystyle\int_{-6}^{2}\left(\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_{0}^{8}\left(\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

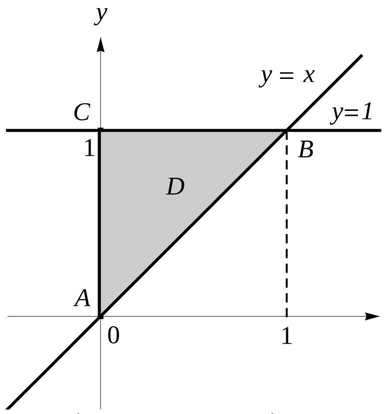
c) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\left(\int_{0}^{\ln x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(\int_{\mathrm{e}^{y}}^{\mathrm{e}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{\frac{x^2}{9}}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left(\int_{\frac{x^2}{9}}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(\int_{y}^{3\sqrt{y}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$

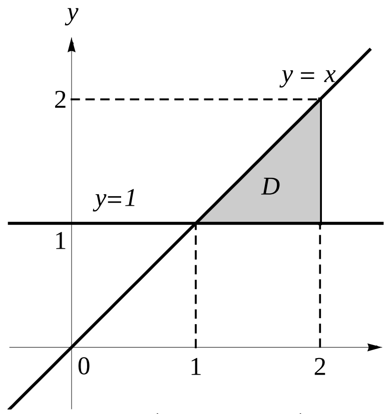
Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

10.8. **a)** $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$ **b)** $I = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_y^2 \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$

a)

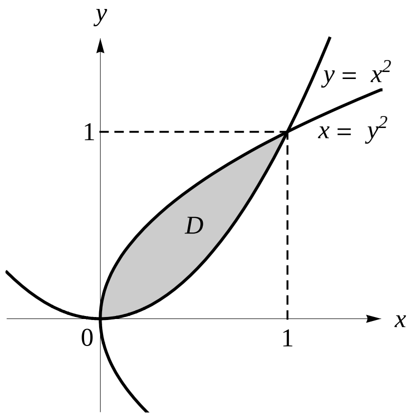


b)

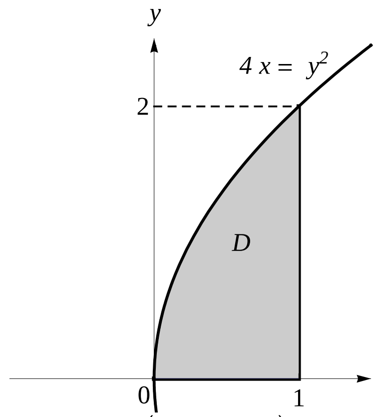


c) $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{33}{140}.$ **d)** $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2\sqrt{x}} xy^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{16}{21}.$

c)

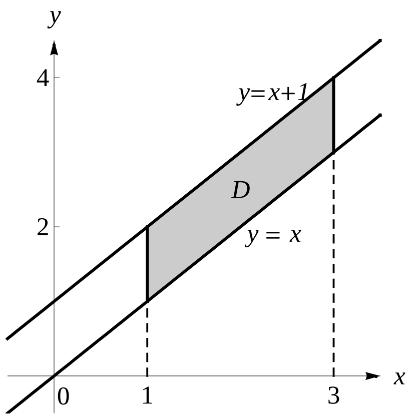


d)

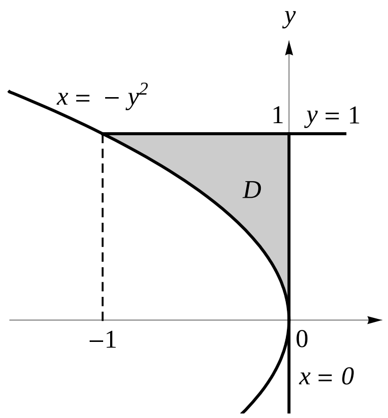


e) $I = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_x^{x+1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 22.$ **f)** $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-y^2}^0 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}.$

e)

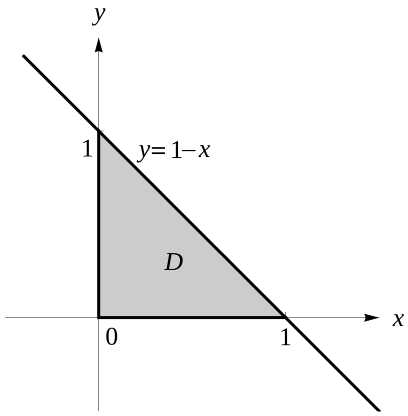


f)



Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

g) $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \dfrac{2}{5}.$



10.10. a) -4 **b)** $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

10.12. a) $8\pi.$ **b)** $\frac{2}{3}.$ **c)** $-2\pi.$ **d)** $\frac{3}{2}\pi.$
e) $\frac{1}{4}\pi(2\ln 2 - 1).$ **f)** $-4\pi.$ **g)** $\frac{4}{3}\pi.$ **h)** $\frac{1}{4}(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}.).$

10.14. a) $P = 3 - 2\ln 2.$ **b)** $P = \mathrm{e} - 1.$ **c)** $P = \frac{7}{3}.$ **d)** $P = \pi - \frac{2}{3}.$

10.16. a) $V = \iint\limits_D \dfrac{(6 - 6x - 3y)}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$

kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 - 2x\}.$

b) $V = \iint\limits_D (1 - \sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{3}$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}.$

c) $V = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{2}$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}.$

d) $V = \iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\pi$, kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}.$

e) $V = \iint\limits_D x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 10$, kde $D = \langle 1,3\rangle \times \langle 2,3\rangle.$

f) $V = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{1}{3},$

kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}.$

g) $V = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} - \dfrac{x^2 + y^2}{3} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{19}{6}\pi,$

kde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 3\}$.

h) $V = 2\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{16}{9}(3\pi - 4),$

kde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x - 1)^2 + y^2 \le 1 \wedge y \ge 0\}$.

10.18. **a)** $\frac{\pi}{8}$. **b)** $\frac{\pi}{2}$. **c)** 2. **d)** 1.

11 Křivkový integrál skalárního pole

11.2. **a)** $\boldsymbol{r}(t) = (10 - 2t,\ 2 + t,\ 1 + 3t),\ t \in \langle 0, 1\rangle$. **b)** $\boldsymbol{r}(t) = (2,\ -1 + 7t),\ t \in \langle 0, 1\rangle$.
c) $\boldsymbol{r}(t) = (-1 + 3t,\ 0,\ 5 - 2t),\ t \in \langle 0, 1\rangle$. **d)** $\boldsymbol{r}(t) = (1 - t,\ 3 - 4t),\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

11.5. **a)** $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. **b)** $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t,\ \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
c) $\boldsymbol{r}(t) = (7\sin t,\ 3\cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. **d)** $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t,\ 3\sin t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
e) $\boldsymbol{r}(t) = (2 + 3\sin t,\ 1 + 3\cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. **f)** $\boldsymbol{r}(t) = (-1 + \cos t,\ \sin t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
g) $\boldsymbol{r}(t) = (3 + 4\cos t,\ -2 + \sin t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. **h)** $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t,\ 1 + 6\cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

11.6. **a)** $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t),\ t \in \langle 0, \pi\rangle$. **b)** $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t,\ \cos t),\ t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\rangle$.
c) $\boldsymbol{r}(t) = (7\sin t,\ 3\cos t),\ t \in \langle 0, \pi\rangle$. **d)** $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t,\ 3\sin t),\ t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\rangle$.
e) $\boldsymbol{r}(t) = (2 + 3\sin t,\ 1 + 3\cos t),\ t \in \langle \pi, 2\pi\rangle$. **f)** $\boldsymbol{r}(t) = (-1 + \cos t,\ \sin t),\ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.
g) $\boldsymbol{r}(t) = (3 + 4\cos t,\ -2 + \sin t),\ t \in \langle \pi, 2\pi\rangle$. **h)** $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t,\ 1 + 6\cos t),\ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

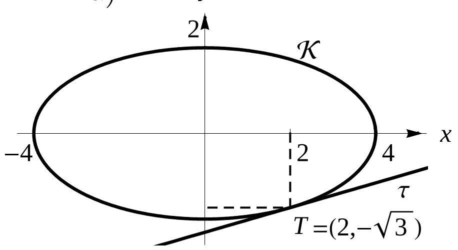
11.7. **a)** $\boldsymbol{r}(t) = (4\sin t,\ 4\cos t),\ t \in \langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi\rangle$. **b)** $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t,\ \sin t),\ t \in \langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi\rangle$.
c) $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t,\ 2\cos t),\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. **d)** $\boldsymbol{r}(t) = (5\cos t,\ 5\sin t),\ t \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$.

11.9. **a)** Je hladká, je jednoduchá uzavřená.
b) Není hladká (souřadnicová funkce $f_2(t) = \sqrt[3]{t}$ nemá v nule vlastní derivaci), je jednoduchá, není uzavřená.
c) Není hladká ($\vec{r}\,'(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$), není jednoduchá ($\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4}) = \boldsymbol{r}(\frac{3}{4}\pi)$), je uzavřená.
d) Je hladká, je jednoduchá, není uzavřená.
e) Není hladká (souřadnicová funkce $f_1(t) = |t|$ nemá v nule derivaci), je jednoduchá, není uzavřená.
f) Je hladká, je jednoduchá uzavřená.

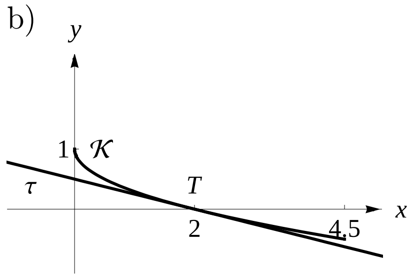
11.10. a) $\tau\colon\ x = 2 + 2\sqrt{3}\,s,\ y = -\sqrt{3} + s,\ s \in \mathbb{R}$. $\mathcal{K}$ je elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) $\tau\colon\ x = 2 + 4s,\ y = -s,\ s \in \mathbb{R}$. $\mathcal{K}$ je oblouk paraboly $x = 2(1-y)^2$, $y \in \langle -\frac{1}{2}, 1\rangle$.

a)



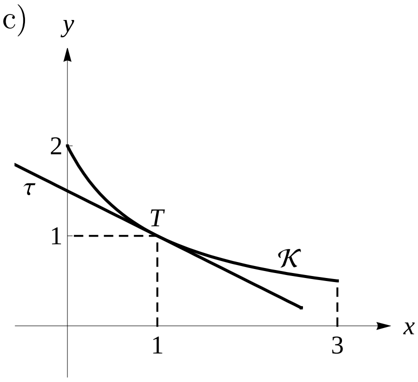
b)



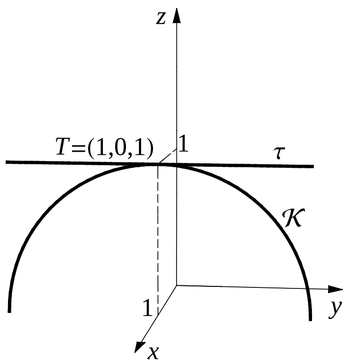
c) $\tau\colon\ x = 1 + 2s,\ y = 1 - s,\ s \in \mathbb{R}$. $\mathcal{K}$ je oblouk hyperboly $y = \frac{2}{x+1}$, $x \in \langle 0, 3\rangle$.

d) $\tau\colon\ x = 1,\ y = -s,\ z = 1,\ s \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{K}$ je půlkružnice v rovině $x = 1:\ S = (1,0,0),\ r = 1,\ z \geq 0$.

c)



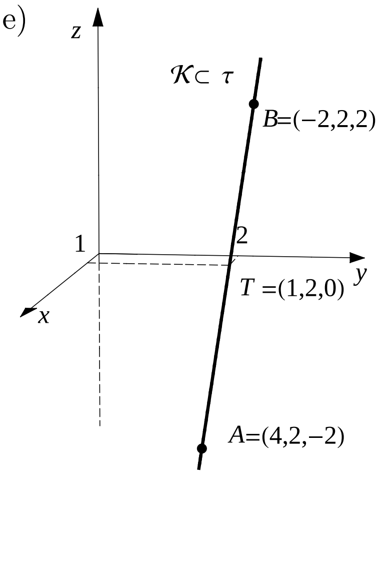
d)



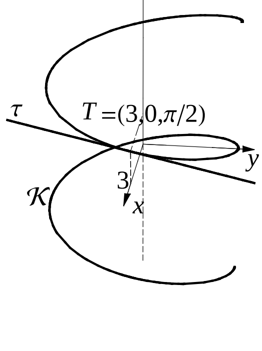
e) $\tau\colon\ x = 1 - 3s,\ y = 2,\ z = 4s,\ s \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{K}$ je úsečka s krajními body: $(4,2,-2)$, $(-2,2,2)$.

f) $\tau\colon\ x = 3,\ y = -3t,\ z = \frac{\pi}{2} + t,\ t \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{K}$ jsou dva závity šroubovice ležící na válcové ploše $x^2 + y^2 = 9$.

e)



f)



11.13. a) $\boldsymbol{r}(t) = (t^2,\, t),\ t \in \langle -1, 0\rangle;\ I = \dfrac{1 - 5\sqrt{5}}{12} \doteq -0,848.$

b) $\boldsymbol{r}(t) = (t,\, \mathrm{e}^t),\ t \in \langle 0, 1\rangle;\ I = \dfrac{3 + \mathrm{e}^2}{4} \doteq 2,597.$

c) $\boldsymbol{r}(t) = (1 - 4t,\, 3t),\ t \in \langle 0, 1\rangle;\ I = 5(\frac{1}{3} + \cos 3 - \frac{4}{9}\sin 3) \doteq -3,597.$

d) $\boldsymbol{r}_1(t) = (1 + 2t,\, 1 + t),\ t \in \langle 0, 1\rangle,\ \boldsymbol{r}_2(t) = (t,\, 2),\ t \in \langle 1, 3\rangle,$
$\boldsymbol{r}_3(t) = (1,\, t),\ t \in \langle 1, 2\rangle;\ I = 3 + (\sqrt{5} + 2)\ln 3 + (\sqrt{5} + 1)\ln 2 \doteq 9,897.$

e) $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t,\, 3\sin t),\ t \in \langle 0, \pi\rangle;\ I = \dfrac{27}{2}\pi \doteq 42,412.$

f) $I = \sqrt{5}\,\pi(1 + \frac{3}{2}\pi + \pi^2 + \frac{1}{4}\pi^3) \doteq 163,914.$

g) $I = \dfrac{\sqrt{3}\,(\mathrm{e} - 1)}{2\mathrm{e}} \doteq 0,547.$ **h)** $I = 0.$

11.14. a) $\boldsymbol{r}(t) = (t,\, \ln t),\ t \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle;\ m = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 3}{2} \doteq 5,195.$

b) $\boldsymbol{r}_1(t) = (t,\, (t - 2)^2),\ t \in \langle 0, 4\rangle,\ \boldsymbol{r}_2(t) = (t,\, 4),\ t \in \langle 0, 4\rangle;$
$m = 25\frac{1}{3} + 4\sqrt{17} \doteq 41,826.$

c) $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{t^2}{2},\, t),\ t \in \langle -1, 1\rangle;\ m = \dfrac{2(2\sqrt{2} - 1)}{3} \doteq 1,219.$

d) $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t,\, \sin t),\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle;\ m = \dfrac{14}{9} = 1,\bar{5}.$

e) $\boldsymbol{r}_1(t) = (1 - t,\, -t,\, 2 - t),\ t \in \langle 0, 1\rangle,\ \boldsymbol{r}_2(t) = (2t,\, -1 - 2t,\, 1 - t),\ t \in \langle 0, 1\rangle,$
$\boldsymbol{r}_3(t) = (2 - t,\, -3 + 3t,\, 2t),\ t \in \langle 0, 1\rangle;\ m = \frac{7}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}(35 + 11\sqrt{14}) \doteq 42,121.$

f) $m = \frac{3}{4}\pi\sqrt{10} \doteq 7,451.$ **g)** $m = 10.$ **h)** $m = \frac{8}{3}\pi\sqrt{6} \doteq 20,521.$

12 Křivkový integrál vektorového pole. Práce

12.4. **a)** $\frac{-31}{3}$ **b)** 1) 0, 2) $\frac{2}{3}$ **c)** 2

d) $-\frac{14}{15}$ **e)** $-\pi$ **f)** $\frac{\pi}{8} - \frac{13}{24}$

12.5. **a)** -12π **b)** 36 **c)** $-\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$

d) 0 **e)** $\mathrm{e} - \frac{5}{6}$ **f)** $-\frac{4}{3}$

12.6. **a)** 4 **b)** $\frac{\pi}{4} + \frac{7}{3}$ **c)** π

d) $7\mathrm{e} + 2$ **e)** 0 **f)** 3

12.7. 0, nezáleží na orientaci kružnice.

12.8. $3\,m\,g\,h$

12.12. Ano, v oblastech $G_1 = \{\,[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$ nebo $G_2 = \{\,[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y < -x\}$.

12.13. 0

12.14. a) Platí. **b)** 2π

c) Např. $\Omega = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

12.15. a) 30 **b)** 0 **c)** 3

d) Nelze, neboť $B \in \Omega_1 = \{ [x,y,z] : z > 0\}$, $A \in \Omega_2 = \{ [x,y,z] : z < 0\}$.

12.18. $U(x,y) = xy^2 + K$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

12.19. $f(x,y) = \ln x^y - 2x + y + K$, $\Omega = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $P \in \Omega$, $Q \in \Omega$, -3.

12.20. a) $\frac{1}{2}(x^2+y^2) + K$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. **b)** $\frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + K$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

c) $yx + K$, $\Omega = \mathbb{R}^2$ **d)** Není

e) Není **f)** $x^2 e^{xy} + y^2 + K$, $\Omega = \mathbb{R}^2$

g) $\ln|x-y| + \dfrac{x}{x-y} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^3}{3} + K$, v oblastech
$\Omega_1 = \{[x,y] : y > x\}$ nebo $\Omega_2 = \{[x,y] : y < x\}$.

12.21. a) $xz + \dfrac{y^2}{2} + K$, $\mathbb{R}^3$ **b)** Není. **c)** $\dfrac{x^2+y^2+z^2+K}{2}$, $\mathbb{R}^3$

d) Není. **e)** Není. **f)** $ax + by + cz + K$, $\mathbb{R}^3$.

12.22. a) $U(x,y) = 3xy^2 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^3}{3}$, v $\mathbb{R}^2$. **b)** $U(x,y) = y\sin x - 3$, v $\mathbb{R}^2$.

c) $U(x,y) = -\dfrac{\sqrt{y}}{x} + x + \arcsin\dfrac{y}{2}$, v $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \in (0,2),\ x < 0\}$.

d) $U(x,y) = -\dfrac{\sqrt{x}}{y} + \sqrt{25-x^2} + 2y - 4$, v $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,5),\ y > 0\}$.

12.23. a) Jednoduše souvislá oblast $\Omega = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : y > 0 \}$, $\ln\dfrac{7}{3}$.

b) 42 **c)** $-\dfrac{38}{5}$ **d)** $\Omega = \mathbb{R}^2$, -1

e) $\vec{F}$ není definované na žádné křivce vedoucí z bodu A do bodu B. Integrál neexistuje.

f) $\mathcal{K}$ je průsečnice válcové plochy $x^2 + y^2 = 9$, s osou v ose z, a roviny $x + z = 0$, procházející bodem $[0,0,0]$. $\mathcal{K}$ je elipsa, tj. uzavřená křivka. Integrál nezávisí na integrační cestě. $\Omega = \mathbb{R}^3$, 0.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Šimerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

Literatura

[MI] Klíč, A., a kol., *Matematika I ve strukturovaném studiu*, skripta VŠCHT, 2007.

[MII] Turzík, D., a kol., *Matematika II ve strukturovaném studiu*, skripta VŠCHT, 2005.

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu*. 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211

RNDr. Miroslava Dubcová, Ph.D., RNDr. Lucie Purmová, Ph.D.,
doc. RNDr. Carmen Simerská, CSc.

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATIKY II
VE STRUKTUROVANÉM STUDIU

Vydala	Vysoká škola chemicko-technologická v Praze Vydavatelství VŠCHT Praha Technická 5, 166 28 Praha 6
Tisk	KANAG - TISK, s.r.o., Technická 5, 166 28 Praha 6
Počet stran	197
Počet obrázků	32
Vydání:	první
Náklad	1000 výtisků
AA/VA	13,85/14,18

Dubcová Miroslava, Purmová Lucie, Simerská Carmen: *Sbírka příkladů z Matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1st ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: (+420) 220 443 211